

投稿 尽数関係にある公転軌道の天体が描く美しい図形

～力学計算をせずに軌道共鳴の安定性を判定できるか～

石坂千春（大阪市立科学館/中之島科学研究所）

1. はじめに

金星と地球の会合周期は583.9日であり、8年間にちょうど5回会合する($365.2日 \times 8年 \div 583.9日 = 5$)。

金星と地球が会合する位置を公転軌道上で順番につなぐと、ペンタグラム（五芒星）を描くことが古くから知られている[1] (図1)。

このように、太陽系の天体どうしで、公転周期に特別な関係をもつものは他にもある。

本報告では特に、互いの公転周期が整数比（「尽数関係」という）になっている天体の軌道の安定性について考察する。

尽数関係にある天体としては、たとえば、木星のガリレオ衛星が有名である。イオ、エウロパ、ガニメデの公転周期の比は、1:2:4であり、ガニメデとカリストの公転周期の比は3:7である[2]。

逆に、火星と木星の間にある小惑星帯では、木星（軌道長半径5.2天文単位）の公転周期11.86年に対し、1:2（同3.3天文単位）、3:7（同

3.0天文単位）、2:5（同2.7天文単位）、1:3（同2.5天文単位）のあたりには小惑星がほとんど存在しないことが知られている[2]。これらの領域は「カークウッドの空隙」と呼ばれている。

互いの公転周期が整数比になる原因として、共鳴軌道になっている場合がある。軌道共鳴は、中心天体(太陽など)と、その周りを公転する2天体(惑星など)の間の周期的な重力の変化により公転軌道が影響を受けるものである。共鳴によって軌道が安定になる場合もあれば、不安定になる場合もあるが、軌道共鳴の計算は、基本的に解析解のない「三体問題」であり、共鳴が起きているかどうかの判定が難しいものも多い。

本報告では、整数比の周期をもつ尽数関係の公転軌道上における、同時刻での内側天体と外側天体の位置をつないだ線分の包絡線（線分群に接する曲線）が、どのような図形を描くのかを見る。そして、実際の太陽系において安定な軌道となっている場合（ガリレオ衛星など）と、不安定な軌道となっている場合（カークウッドの空隙など）について、包絡線の描く図形がどのように異なるのかを考察する。

その結果を踏まえ、複雑な「三体問題」を解くことなく、軌道の安定・不安定を図形から予測できる可能性について報告する。

2. 計算方法

簡単のため、天体の軌道は円とし、一定の速度で軌道上を周回するものとする。

内側天体（天体1）の公転周期と外側天体



図1 金星と地球の会合位置が公転軌道上にペンタグラムを描く。

(天体2)の公転周期の比を $N_1:N_2$ とすると、外側天体の軌道半径が1の時、内側天体の軌道半径 a_1 はケプラーの第3法則より、

$$a_1 = \sqrt[3]{(N_1/N_2)^2}$$

と書ける[3]。ただし a_1 の値は以後の議論では結果(図形の特徴)を左右しないので、どんな値を採ってもかまわない。

MSエクセルにより、一定の時間間隔で天体1と天体2の位置を計算し、図にプロットする(図2)。図化するに当たり、x軸(正)上で会合していた両天体が反時計回りに公転し、再びx軸(正)上で会合するまで、同時刻での両天体の位置同士を線分で接続した(【付録1】)。

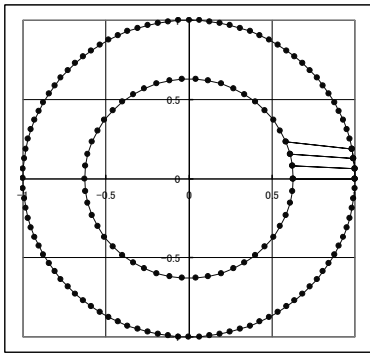


図2 図化の途中経過

天体は反時計回りに公転している。同時刻の内側天体の位置と外側天体の位置を線分で接続する。

3. 結果

互いの公転周期が整数比になっている代表的な場合について計算した結果を、以下の節に示す。

3.1 公転周期の比が1:2の場合(図3)

木星のガリレオ衛星のうち、内側の3つ(イオ、エウロパ、ガニメデ)は、公転周期の比が1:2の共鳴軌道になっている(表1)。

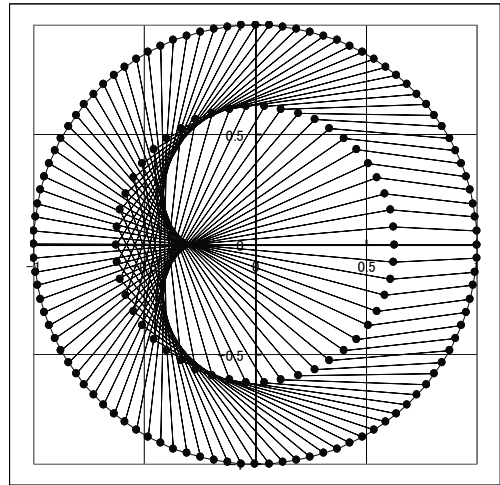


図3 公転周期の比 1:2 (内側天体の軌道半径 $a_1=0.63$)

同時刻での内側天体と外側天体の位置を線分でつないでいる。x軸上で会合していた両天体が反時計回りに公転し、再びx軸上で会合するまでを表示している(以下の図でも同様)

表1 ガリレオ衛星の公転周期[2]

衛星	公転周期(日)
イオ	1.77
エウロパ	3.55
ガニメデ	7.15

他に、公転周期が1:2になっているものに、土星の衛星のミマスーテチス、エンケラドスーディオネがある。

また、公転周期が木星の1/2になる軌道付近には小惑星がほとんど存在せず、カークウッドの空隙になっていることが知られている。

3.2 公転周期の比が2:3の場合(図4)

海王星と冥王星の関係、および小惑星のHilda群と木星との関係は、公転周期の比が2:3である。

周期2:3の場合を図示したものが図4である。包絡線が描く図形は凸部が1つ、凹部が1つで、右に90度倒したハート型になっている。

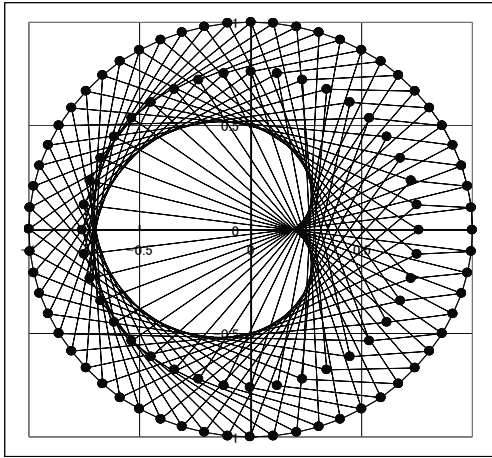


図4 公転周期の比 2 : 3 ($a_1=0.76$)

3.3 公転周期の比が3 : 4の場合 (図5)

小惑星のThule群6個は、その公転周期が木星の公転周期と3:4の整数比になっている。また、土星の衛星タイタンとヒペリオンも同様の尽数関係である。

図5を見ると、左に90度倒したハート型が目立つが、よく見ると内側天体の軌道と、“ハート型”の間に、右に90度倒した、一回り大きな丸いハート型がもう一つ描かれているのがわかる。

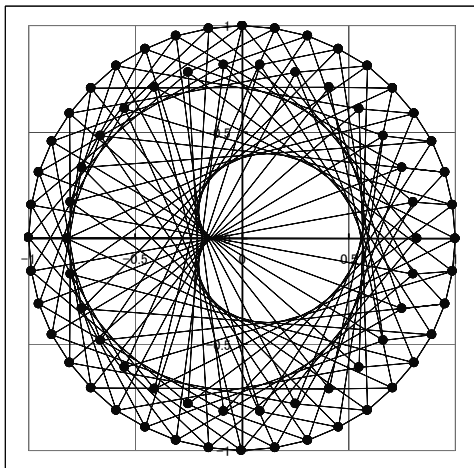


図5 公転周期の比 3 : 4 ($a_1=0.82$)

3.4 公転周期の比が1 : 3の場合 (図6)

木星の公転周期の1/3になる小惑星帯は、小惑星がほとんど存在しない領域「カークウッドの空隙」である。包絡線はハート型を描いていない (図6)。

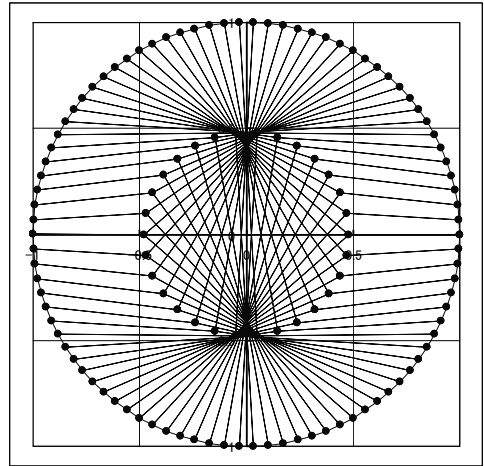


図6 公転周期の比 1 : 3 ($a_1=0.48$)

3.5 公転周期の比が1 : 4の場合 (図7)

木星の公転周期の1/4になる小惑星帯も、カークウッドの空隙の一つである。ちなみに、火星の衛星のフォボスとダイモスの公転周期も、ほぼ1:4である。

前節同様、ハート型を描いていないことが

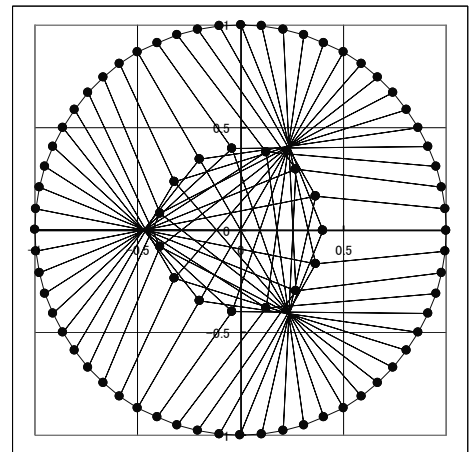


図7 公転周期の比 1 : 4 ($a_1=0.4$)

見て取れる (図7)。

3.6 公転周期の比が 1 : 5 の場合 (図8)

該当する天体は無いが、参考のため、計算したものを図示する (図8)。

包絡線の図形として、正方形が見える。

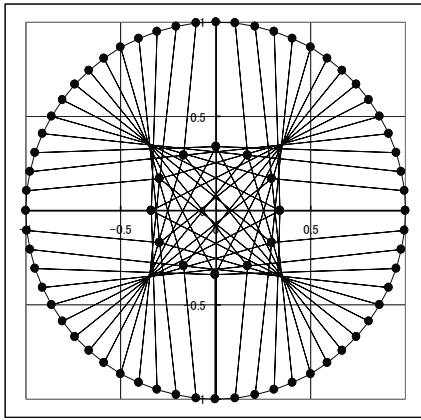


図8 公転周期の比 1 : 5 ($a_1=0.34$)

3.7 公転周期の比が 2 : 5 の場合 (図9)

小惑星帯では、木星の公転周期と2:5の関係のある軌道付近もまたカークウツの空隙である。ちなみに、木星の公転周期 (11.86年) と土星の公転周期 (29.46年) も、周期の比

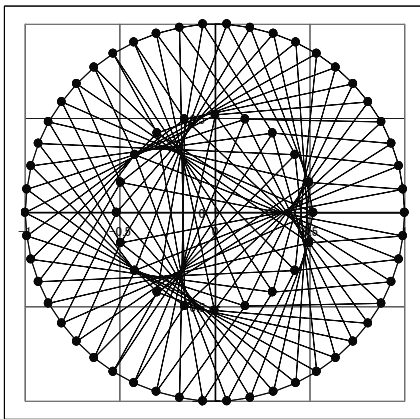


図9 公転周期の比 2 : 5 ($a_1=0.52$)

外側の円が木星軌道だとすると、内側の円がカークウツの空隙にあたる。

がほぼ、2:5になっている。

丸みをおびた凸部がない (図9)。

3.8 公転周期の比が 3 : 5 の場合 (図10)

太陽系外縁天体1994JS (軌道長半径42.5天文単位) は海王星 (同30.1天文単位) と、3:5の共鳴軌道にあり、3回公転する間に、2回、海王星と会合する。包絡線の模様には“双葉”が見える (図10)。

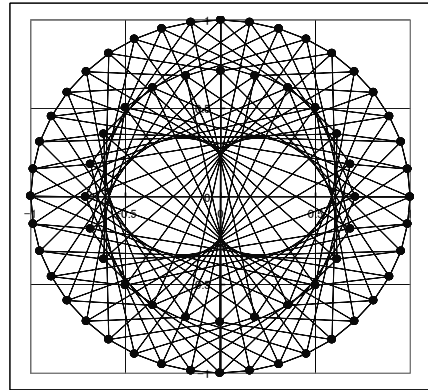


図10 公転周期の比 3 : 5 ($a_1=0.71$)

3.9 公転周期の比が 3 : 7 の場合 (図11)

木星の公転周期と3:7の関係にある軌道付近の小惑星帯は、やはりカークウツの空隙である。一方、ガリレオ衛星のガニメデとカリストは、公転周期が3:7の尽数関係にある。

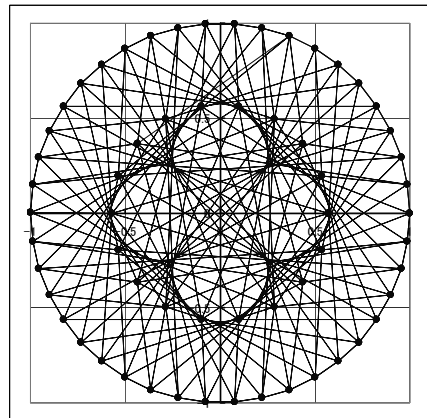


図11 公転周期の比 3 : 7 ($a_1=0.57$)

外側のカリストは3回公転する間に、ガニメデと4回会合し、その包絡線は、なんと“四葉のクローバー”を描いている（図11）。

3.10 公転周期の比が5 : 8の場合（図12）

公転周期の比が5:8の場合、外側天体が5回公転する間に3回会合し、包絡線は、“三つ葉のクローバー”を描く（図12）。

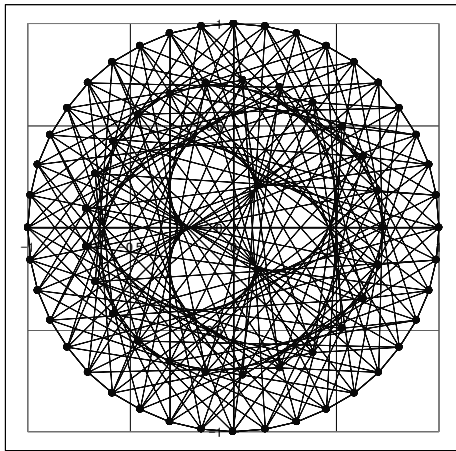


図12 公転周期の比 5 : 8 ($a_1=0.73$)

3.11 公転周期の比が8 : 13の場合（図13）

金星（公転周期0.615年）と地球（公転周期1年）の関係である。第1章で述べたように、

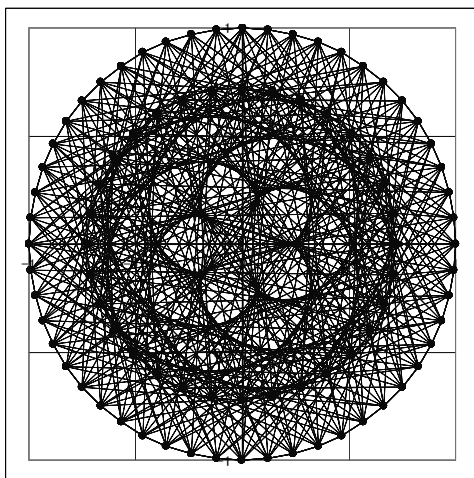


図13 公転周期の比 8 : 13 ($a_1=0.72$)

金星と地球は8年間に5回会合する。

金星と地球をつなぐ線分の包絡線群は、なんと、バラ科の特徴である、美しい5弁の花を描く（図13）。

外側の円が地球の軌道、少し見づらいが内側の円が金星の軌道に相当する。金星軌道の内側に、“五弁の花”が4つ重なっているように見える。

3.12 黄金比の場合（図14）

ところで、金星と地球の公転周期の比（1:1.625）は、ほぼ黄金比（1:1.618...）になっている、とも言える。

黄金比はフィボナッチ数列 {1,1,2,3,5,8,13,...} の隣り合う数同士の比の極限として表わされる。3.8節で見た「3:5」、3.10節の「5:8」、3.11節の「8:13」は、徐々に黄金比に近づいていたわけである。

黄金比の場合の2天体間を結ぶ線分群を図示したものが図14である。

黄金比は無理数であるため、2天体の公転周期は尽数関係にはならない。黄金比は美の象徴とされることがあるが、公転周期が黄金比になっている天体が描く模様は、あまり美しくないように思われる。

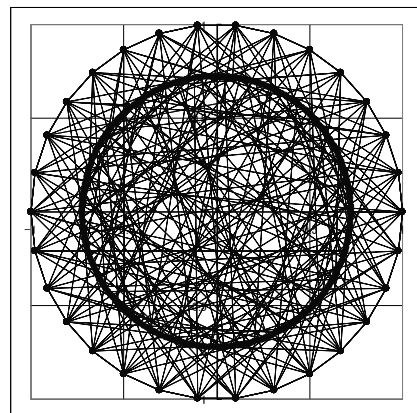


図14 黄金比の場合 ($a_1=0.73$)

4. 考察

公転周期が整数比になっている尽数関係の軌道をとる天体同士について、一定の時間間隔で軌道上の位置を線分でつなぐと、包絡線が特徴的な幾何学模様を描くことを見てきた。

第1章で述べたように、尽数関係にある公転は安定な場合と不安定な場合がある。判定するには複雑な三体問題を解かねばならないが、文献[2]のデータを見ると、内側天体の質量 m_1 と外側天体の質量 m_2 に対して、

- $m_1 \ll m_2$ ……不安定 (カークウッドの空隙)
- $m_1 \sim m_2$ ……安定 (ガリレオ衛星など)
- $m_1 > m_2$ ……安定 (海王星-冥王星など)

という傾向がある。

本報告では力学までは考慮しなかったが、安定な軌道と不安定な軌道とで、包絡線が描く模様に、表2のような違いがあった。

表2 公転周期比と包絡線図形の関係
(網掛けは安定な軌道)

周期比	凸部 数	凹部 数	凹部位置 (a_1 に対する比)
1:2 (図 3)	0	1	0.5
2:3 (図 4)	1	1	0.3
3:4 (図 5)	1	1	0.2
1:3 (図 6)	0	2	0.9
1:4 (図 7)	3	0	-
2:5 (図 9)	0	3	0.7
3:5 (図 10)	2	2	0.3
3:7 (図 11)	4	4	0.6
5:8 (図 12)	3	3	0.3
8:13 (図 13)	5	5	0.3

(1) 凸部の数や形

一般的に、内側天体(1)と外側天体(2)の周期の比を $N_1 : N_2$ とすると、外側天体が N_1 回公転する間に、両天体は $N_2 - N_1$ 回会合する。包

絡線が描く模様は周期比の整数の差 ($N_2 - N_1$) と同じ数の凹部や凸部をもつ。

実際に安定な軌道として天体が存在するような整数比 (2:3、3:4、3:5、3:7、8:13など) の場合、包絡線が描く図形の凸部は丸みを帯びている (図4、5、10、11、13)。

一方、不安定な軌道になっている整数比 (1:3、1:4、1:5など) の場合、そもそも凸部がない (1:3の場合; 図6) か、尖った凸部 (1:4、1:5の場合) になっている (図7、8)。

(2) 凹部の位置

包絡線の凹部 (線分が集中している部分) が内側天体の軌道 (a_1) よりも中心に近い場合は安定 (図4など)、逆に内側天体の軌道に近い場合は不安定になる例がある (図6など)。

線分集中部 (凹部) は、2天体間の引力の方向が中心天体の方向に長期間そろう場所である。この場所が内側天体の公転軌道付近にあり、かつ、内側天体の質量が外側天体の質量より小さければ、特定の場所で定期的に引力の強弱を受け、内側天体の軌道は容易に変化を受けてしまう。

以上のように、単純な計算を行い、図形を描画するだけで、力学を知らなくても、軌道共鳴についての知見や予測が得られる可能性があることが、今回の考察によってわかった。

尽数関係にある公転軌道の天体たちは人知れず虚空の宇宙空間に美しい図形を描き続けている。そんな美しい図形に、複雑な天体力学の解が現れているのかもしれない。

文献

- [1] Carl Liungman 「Symbols」 (HME Publishing)、p287、2004年
- [2] 国立天文台・編「理科年表 平成21年度版」(丸善)、p89-90、2009年
- [3] バーガー&オルソン「力学」(培風館)、p109、1987年

【付録1】包絡線図形の描き方

公転する2天体の位置を計算し、本報告で見たような包絡線図形を描く手順は次のとおりである。すべてMSエクセルを利用した。

①天体の位置計算

簡単のため、天体の公転軌道は円としていたので、スタートから*i*ステップ目の内側天体の位置{x₁(*i*), y₁(*i*)}と外側天体の位置{x₂(*i*), y₂(*i*)}は、それぞれ、

$$x_1(i) = a_1 \cdot \cos(360^\circ / n_1 \cdot i)$$

$$y_1(i) = a_1 \cdot \sin(360^\circ / n_1 \cdot i)$$

$$x_2(i) = a_2 \cdot \cos(360^\circ / n_2 \cdot i)$$

$$y_2(i) = a_2 \cdot \sin(360^\circ / n_2 \cdot i)$$

である。

ここで、*a*₁は内側天体の軌道半径、*n*₁、*n*₂はそれぞれ内側天体と外側天体の軌道上でのステップ数である。内側天体と外側天体の公転周期の比が*N*₁ : *N*₂なので、*n*₁・*n*₂ = *N*₁・*N*₂であり、いずれのケースでも*n*₁ < *n*₂である（内側天体の方が外側天体より公転運動は速いので、1周に必要なステップ数は外側天体のステップ数より少なくなる）。

また、第2章で述べたように、ケプラーの第3法則より、

$$a_1 = \sqrt[3]{(N_1 / N_2)^2}$$

であり、定義より、*a*₁ < 1である。

包絡線の模様を見やすくするため、外側天体の軌道上のステップ数*n*₂は少なくとも20以上（1ステップあたりの軌道上の移動量は18°未満）が望ましいようである。ただし、あまり多いと、線分が重なり過ぎて、模様が見えなくなる。

*x*軸（正）上で会合している状態からスタートし、再び*x*軸（正）上で会合するまでステップを進め、*n*₂ × *N*₁回の計算を行う。

②描画用データの作成

計算した位置データを次のように並べる。

x₂(0) y₂(0) …外側天体のスタート地点

x₁(0) y₁(0) …内側天体のスタート地点

x₂(0) y₂(0) …外側天体のスタート地点

x₂(1) y₂(1) …外側天体の1ステップ目

x₁(1) y₁(1) …内側天体の1ステップ目

x₂(1) y₂(1) …外側天体の1ステップ目

x₂(2) y₂(2) …外側天体の2ステップ目

・

x₂(*n*₂・*N*₁-1) y₂(*n*₂・*N*₁-1) …最終ステップ

x₁(*n*₂・*N*₁-1) y₁(*n*₂・*N*₁-1)

x₂(*n*₂・*N*₁-1) y₂(*n*₂・*N*₁-1)

x₂(*n*₂・*N*₁) y₂(*n*₂・*N*₁) …再び*x*軸上で会合

この数字列に対し、MSエクセルの「グラフ」ウィザード→「散布図」→「データポイントを折れ線でつないだ散布図」により図化すればよい。

【付録2】スピログラフ[®]の描き方

公転する2天体の相対位置を追跡し、図示することもできる。これをスピログラフ（「スピログラフ」はハズプロ社の登録商標）と言う。

一方の天体（たとえば内側天体）に対する他方の天体（外側天体）の相対位置は、周天円上を周回する点の軌跡として表現できる。したがって、天体の描くスピログラフは広義のサイクロイドの一種である。

スピログラフの方が、包絡線図形を描くより簡単である。

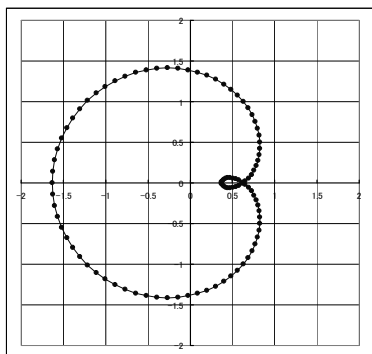
*i*ステップ目の内側天体{x₁(*i*), y₁(*i*)}に対する外側天体{x₂(*i*), y₂(*i*)}の相対位置は、

$$\{x_2(i) - x_1(i), y_2(i) - y_1(i)\}$$

と書ける。

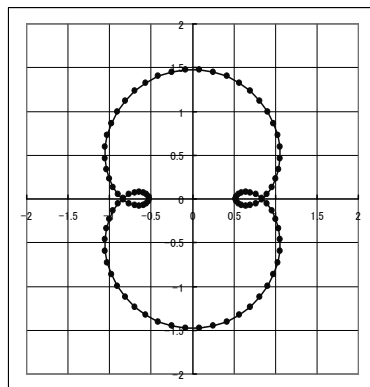
これを図示したものが、A図1～11である。それぞれ、本編の図3～13に対応している。

尽数関係にある天体のスピログラフは、安定な軌道、不安定な軌道、ともに美しい図形となる。



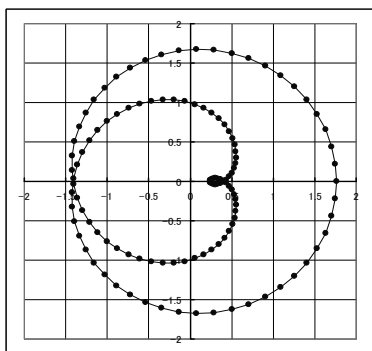
A図1 公転周期の比 1:2 ($a_1=0.63$)

※本編の図3に対応する



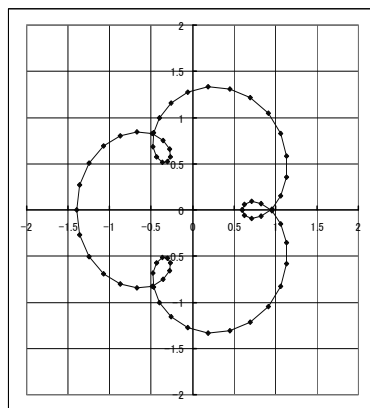
A図4 公転周期の比 1:3 ($a_1=0.48$)

※本編の図6に対応する



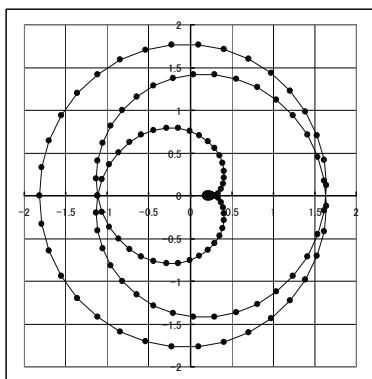
A図2 公転周期の比 2:3 ($a_1=0.76$)

※本編の図4に対応する



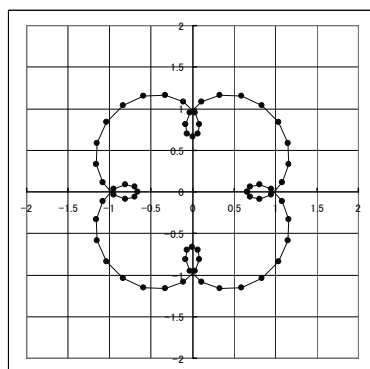
A図5 公転周期の比 1:4 ($a_1=0.4$)

※本編の図7に対応する



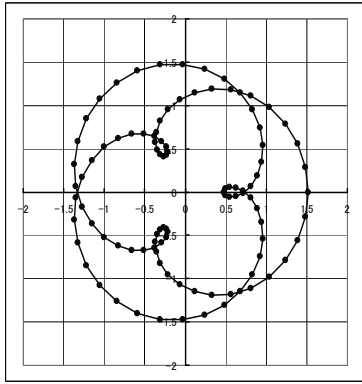
A図3 公転周期の比 3:4 ($a_1=0.82$)

※本編の図5に対応する

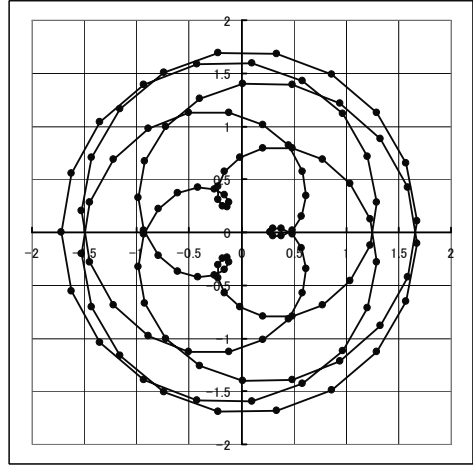


A図6 公転周期の比 1:5 ($a_1=0.34$)

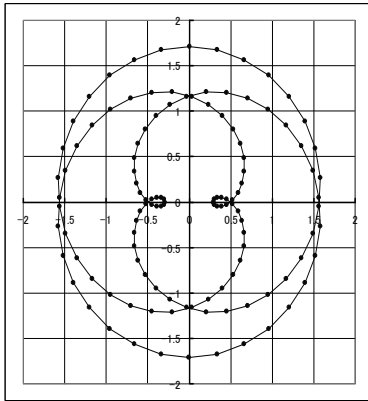
※本編の図8に対応する



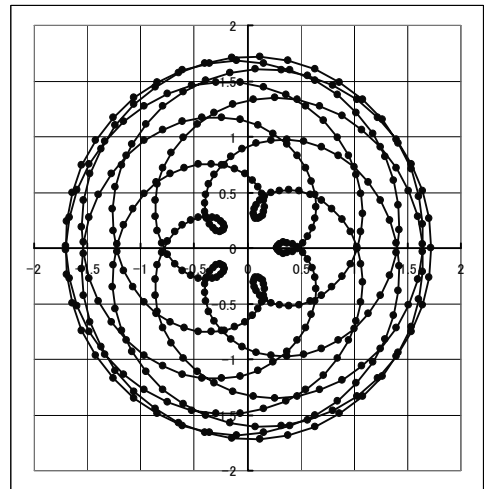
A図7 公転周期の比 2:5 ($a_1=0.52$)
※本編の図9に対応する



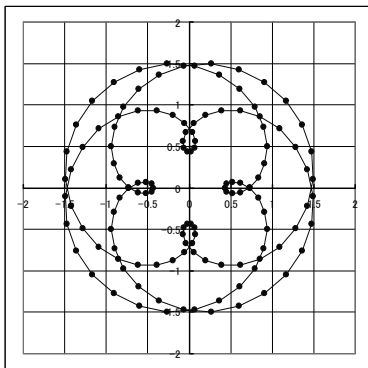
A図10 公転周期の比 5:8 ($a_1=0.73$)
※本編の図12に対応する



A図8 公転周期の比 3:5 ($a_1=0.71$)
※本編の図10に対応する



A図11 公転周期の比 8:13 ($a_1=0.72$)
※本編の図13に対応する



A図9 公転周期の比 3:7 ($a_1=0.57$)
※本編の図11に対応する

いしざかちはる

<http://www.sci-museum.kita.osaka.jp/>

~ishizaka/