

投稿

天文教育における探究型学習課題(6)

～天文ソフトとエクセルで体感する歳差章動のメカニズム～

東亜天文学会 江頭 務

1. はじめに

前回の「学習(5)」では、観測データ(天文ソフト)から18.6年周章動を導き出した。しかしながら、それは解析をただけの話でメカニズムの理解としてはものたりない。ここでは、月の軌道を円軌道に模擬することにより主要章動の数式化を試みる。

2. 月の軌道のモデル化

主要章動の数式化にあたって、月の軌道のモデル化が必要である。しかしながら昇降点が移動する月のトルクの厳密な計算はやっかいである。そこで次のように考える。月の交点周期は18.6年(6793.5日)であり、交点月の平均は27.2122日であるから月が地球を1回転する時の黄道面を進む平均角度は約

$$360^\circ \times \frac{27.2122}{6793.5} = 1.44^\circ \text{ となる。}$$

月の1回転分の軌道は太陽のように閉じた円にはならないが、 1.44° のズレの影響はL版写真サイズのグラフ上ではほとんど認められない。このことから、ここでは1回分の月の公転における昇交点の移動を停止して計算する。つまり、月の軌道を一回転ごとに円軌道に分離して取り扱うことにする。

最終的に、昇交点の位置 λ_Ω をパラメータとして月の白道経 γ を $0 \sim 360^\circ$ 変化させた時の地球が受けるトルクを算出する。

まず月の軌道を楕円軌道から円軌道に置き換える。

図6.1は月の位置における黄道座標と赤道座標の関係を示したものである。円軌道における月の赤経、赤緯は、通常回転行列を用いて計算される[1]。しかしここでは、平易によく知られた黄道座標と赤道座標の変換式を用いる。

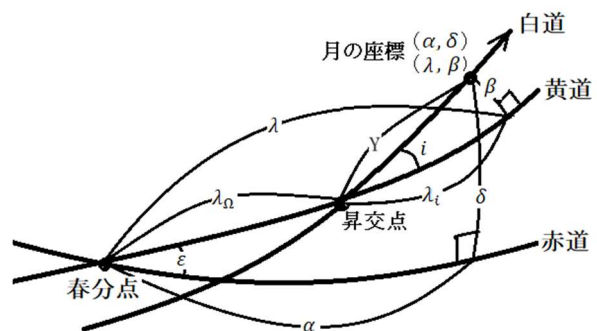


図 6.1 月の黄道座標(λ, β)と赤道座標(α, δ)の関係

黄道座標 λ 月の黄経 β 月の黄緯
 λ_Ω 春分点から月の昇交点までの黄経
 λ_i 月の昇交点から月までの黄経
 赤道座標 α 月の赤経 δ 月の赤緯
 ε 黄道傾斜角 i 白道傾斜角
 白道経 γ 昇交点から月までの角距離

計算手順の概要

- ① 昇交点の黄経 λ_Ω を設定
- ② 昇交点から測った月の白道経 γ を設定
- ③ 昇交点から測った月の黄経 λ_i を球面の直角三角形の公式から求める

$$\tan \lambda_i = \tan \gamma \cos i \quad (6.1)$$

- ④ 月の黄経 λ を求める

$$\lambda = \lambda_{\Omega} + \lambda_i \quad (6.2)$$

- ⑤ 月の黄経 β を球面の直角三角形の公式から求める。

$$\sin \beta = \sin \gamma \sin i \quad (6.3)$$

- ⑥ 月の黄道座標(λ, β)を赤道座標(α, δ)に変換する

$$\tan \alpha = \frac{-\sin \beta \sin \varepsilon + \cos \beta \sin \lambda \cos \varepsilon}{\cos \beta \cos \lambda} \quad (6.4)$$

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \lambda \sin \varepsilon \quad (6.5)$$

- ⑦ 月の赤道座標(α, δ)を下式に代入しトルク N_x, N_y を算出

$$N = \frac{3GM}{2R^3} (C - A) \sin 2\delta \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

- ⑧ 昇交点黄経 λ_{Ω} をパラメータとして、月の白道経 γ を $0 \sim 360^\circ$ 変化させて、 N_x, N_y のグラフを作成する

エクセルの計算式

$\tan^{-1}, \sin^{-1}$ の戻り値に注意。

エクセルでは $\tan^{-1}, \sin^{-1}$ は $-\pi/2 \sim \pi/2$ の範囲しか返さないため、実情に合うように補正する必要がある。

A 列 γ 昇交点から測った月の白道経 γ を連続データで入力

$0 \sim 360^\circ$ 1° ピッチ 361 行

B 列 昇交点から測った月の黄経 λ_i を求め

るために $\tan \lambda_i$ を計算

$$= \text{TAN}(\text{RADIANS}(A21)) * \text{COS}(\text{RADIANS}(\$H\$5))$$

月の平均軌道傾斜角 i $\$H\$5=5.1657^\circ$
 (「学習(3)」表 3.1)

C 列 λ_i deg =DEGREES(ATAN(B21))

負の値に注意

D 列 λ_i 補正 λ_i の負の値を正の値に修正す

るため、A 列 γ が 90° 以下ならば 0° 、
 90° を越えたら 180° 、 270° を越えたら
 360° と置く (エクセル関数ネスト)
 =IF(A21>270,360,IF(A21>90,180,0))

E 列 補正された λ_i deg =C21+D21

これで λ_i は $0 \sim 360^\circ$ の表記となる

F 列 月の黄経 $\lambda = \lambda_{\Omega} + \lambda_i$ deg
 360° を越える値は MOD 関数にて 360° を
 減算する

=MOD(\$F\$17+E21,360)

$\$F\17 は月の昇交点黄経 λ_{Ω} (外部設定)

時計のイメージで λ が λ_{Ω} から連続してスム
 ーズに増加していることを確認する。

G 列 F 列を rad に換算 $\lambda = \text{RADIANS}(F21)$

H 列 $\sin \beta$ を求める

=SIN(RADIANS(A21))*SIN(\$H\\$5)

$\$H\5 は月の軌道傾斜角 $i=5.1567^\circ$ の
 ラジアン値 (「学習(3)」表 3.1)

I 列 β rad を $\sin$ の逆関数でもとめる

=ASIN(H21)

J 列 上記の β rad を β deg に変換

=DEGREES(I21)

値の変化の範囲は

$\pm 5.2^\circ$ (月の軌道傾斜角 i)

K 列 黄道座標から赤道座標に変換するため
 に $\tan \alpha$ を計算

=(-SIN(I21)*SIN(\$B\$8)
 +COS(I21)*SIN(G21)
 *COS(\$B\$8))/(COS(I21)*COS(G21))

$\$B\8 は地球の黄道傾斜角 $\varepsilon=23.4348^\circ$
 のラジアン値 (「学習(3)」表 3.1)

L 列 α を $\tan$ 逆関数で計算

=DEGREES(ATAN(K21))

M 列 α 補正 α の負の値を正の値に修正するため、F 列 λ が 90° 以下ならば 0° 、 90° を越えたら 180° 、 270° を越えたら 360° と置く (エクセル関数ネスト)

=IF(F21>270,360,IF(F21>90,180,0))

N 列 補正された α deg =L21+M21

O 列 黄道座標から赤道座標に変換するために $\sin\delta$ を計算

=SIN(I21)*COS(RADIANS(\$B\$8))+
COS(I21)*SIN(G21)*SIN(\$B\$8)

\$B\$8 は地球の黄道傾斜角 ε

P 列 O 列を δ deg に変換

=DEGREES(ASIN(O21))

Q 列 N_x トルクを計算

=\$H\$7*SIN(RADIANS(2*P21))*

SIN(RADIANS(N21))

\$H\$7=3.4052E+22

「学習(3)」表 3.1 参照

R 列 Q 列を台形法により平均トルクを算出

1 行目 0、2 行目より =(Q21+Q22)/2

平均値 =SUM(R21:R381)/360

S 列 N_y トルクを計算

=-\$H\$7*SIN(RADIANS(2*P21))*

COS(RADIANS(N21))

\$H\$7=3.4052E+22

「学習(3)」表 3.1 参照

T 列 S 列を台形法により平均トルクを算出

1 行目 0、2 行目より=(S21+S22)/2

平均値=SUM(T21:T381)/360

続いて、上記で求められたトルク Q 列 N_x と S 列 N_y を使って章動パターンを求める。

求め方の要領は「学習(5)」表 5.4 と同じである。

3. 計算結果の数式化

3.1 円軌道模擬によるトルクと

章動の計算結果

歳差章動を引き起こす源はトルクである。そのため、歳差章動のメカニズムを理解するためにはトルクから検討するのが分かりやすい。表 6.1 はエクセルにて計算した平均トルクと章動楕円の振幅の計算結果である。

表中の時間と昇交点黄経の単位は度である。時間は、昇交点周期 6793.5 日を 360° として表記したものである。円軌道の時間と昇交点黄経の和は常に 360 である。

表 6.1 円軌道による平均トルクと章動楕円の振幅の計算結果

時間	昇交点	N_x Nm	N_y Nm	θ_x "	θ_y "
0	360	1.431E+22	-5.849E+05	0.095	0.108
30	330	1.405E+22	1.351E+21	0.093	0.106
60	300	1.334E+22	2.375E+21	0.090	0.100
90	270	1.233E+22	2.797E+21	0.084	0.091
120	240	1.126E+22	2.469E+21	0.076	0.082
150	210	1.045E+22	1.446E+21	0.070	0.074
180	180	1.014E+22	5.035E+05	0.067	0.071
210	150	1.045E+22	-1.446E+21	0.070	0.074
240	120	1.126E+22	-2.469E+21	0.076	0.082
270	90	1.233E+22	-2.797E+21	0.084	0.091
300	60	1.334E+22	-2.375E+21	0.090	0.100
330	30	1.405E+22	-1.351E+21	0.093	0.106
360	0	1.431E+22	3.150E+05	0.095	0.108

次の図 6.2 は天文ソフトから入手したデータをもとに計算した平均トルク N_x 「学習(5)」表 5.2 と今回計算した円軌道による平均トルク N_x 表 6.1 を比較したものである。以下、前者を実トルク、後者を円トルクと呼ぼう。尚、図 6.2 から昇交点黄経を求めるには、前述のように 360 から度で表された時間を引けばよい。

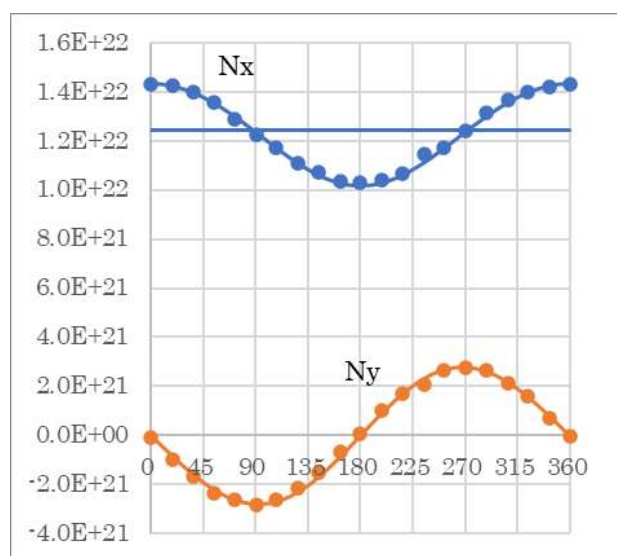


図 6.2 Nx Ny 平均値 単位 Nm

実トルク（ドット）と円トルク（線）

横軸 度で示した時間 360° = 6793.5 日

縦軸 Nx 上側 Ny 下側

ドットで表した実トルク（観測値）はほぼ円トルク（計算値）の線上にあることがわかる。Nx の横線は Nx の平均値であり、これが歳差となる。

3.2 数式の導出

数式化にあたり、図 6.2 の対称性に着目する。円トルク Nx は 180°を中心にして左右対称、円トルク Ny は 180°において点対称である。フーリエ解析によれば、図 6.2 は多数の sin cos 波の集積である。そこで人為的なフーリエ解析を試みるために、次なる関数を構想する。Nx の最大値は 0°=360°にあり、それを MAX とする。また、Nx の最小値は 180°にあり、それを MIN とする。すると、図 6.2 の Nx の特性は次のように近似できる。

$$Nx = \frac{MAX+MIN}{2} + \frac{MAX-MIN}{2} \cos \lambda \quad (6.6)$$

表 6.1 より MAX= 1.4309E+22

MIN= 1.0141E+22 であるから

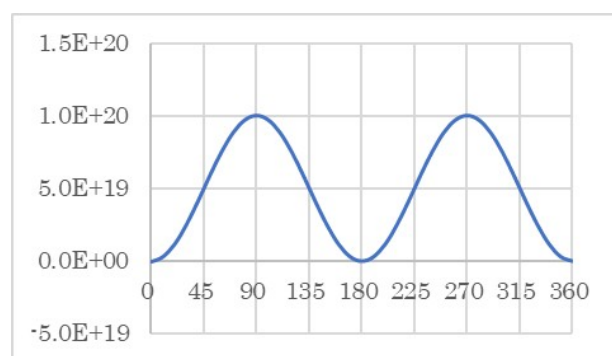
(6.6)式を具体的に数値であらわすと下式になる。

$$Nx_1 = 1.2225E+22 + 2.0840E+21 \cos \lambda$$

(6.7)

これを円トルクの 18.6 年周章動に対応する一次成分 Nx₁ と呼ぼう。

次に、図 6.2 において Nx トルクから(6.7)式で計算された近似トルクを減算すると図 6.3 のような倍の角速度をもった -cos 的な曲線が得られる。波高値は約 5E+19 で 1/40 程度に激減していることがわかる。これを 9.3 年周章動に対応する二次成分 Nx₂ と呼ぼう。

図 6.3 円トルクの Nx₂ 単位 Nm

二次成分 (9.3 年周章動)

横軸 度で示した時間 360° = 6793.5 日

図 6.3 を -cos 波と想定し、前述のやり方で近似式を作成する。

最大値 Max=1.00380E+20

最小値 Min=0 を(6.6)式に代入すると

$$Nx_2 = 5.0190E+19 - 5.0190E+19 \cos 2\lambda$$

(6.8)

さらに図 6.3 から上式を減算すると波高値 2.2E+7 程度の対称性の崩れた乱れた波形が出現する。対称的なものから対称的なものを減算すれば対称的なものが残るはずだから、これは計算誤差として扱って良いだろう。

次に N_y に進もう。図 6.2 から一目で $-\sin$ 波に近似できることが分かる。前述と同じやりかたで、表 6.1 の円軌道のエクセルの計算結果から時間 90 と 270 に着目すると

最大値 $\text{Max}=2.7968\text{E}+21$

最小値 $\text{Min}=-2.7968\text{E}+21$ なので

近似式は $N_{y1}=-2.7968\text{E}+21\sin\lambda$ (6.9) となる。円トルクの対称性から正負の波高値は等しくなる。これを円トルクの 18.6 年周章動に対応する一次成分 N_{y1} と呼ぼう。

次に図 6.2 の円トルクから(6.9)式を減算したものが図 6.4 となる。

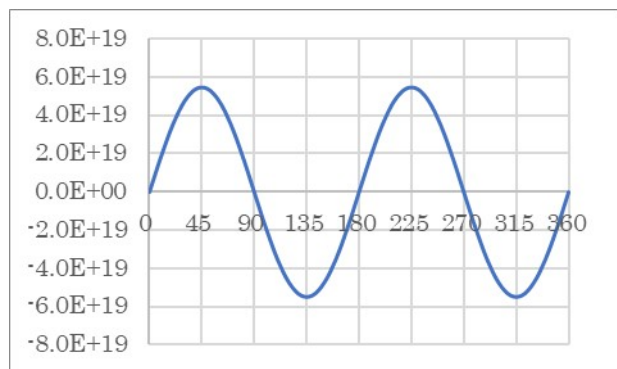


図 6.4 円トルクの N_{y2} 単位 Nm
二次成分 (9.3 年周章動)
横軸 時間 度

前述と同じやりかたで、円軌道のエクセルの計算結果から、

最大値 $\text{Max}=5.4705\text{E}+19$

最小値 $\text{Min}=-5.4705\text{E}+19$ なので

近似式は $N_{y2}=5.4705\text{E}+19\sin 2\lambda$ (6.10) となる。これを円トルクの 9.3 年周章動に対応する二次成分 N_{y2} と呼ぼう。

図 6.4 から上式を減算すると最大波高値 $1.7\text{E}+7$ 程度の乱れた波形が出現する。これは、これは前述と同じく計算誤差として扱って良いだろう。ここで、(6.7)～(6.10)の数式の係数は巨大な数字であるので、見通し良くするために、一応、定数と見なせる下記の

(6.11)式から求まる次の K_{mc} の値

$1.7026\text{E}+22$ を使って数式を整えよう。

$$K_{mc}=3GM_m(C-A)/4R_m^3=1.7026\text{E}+22 \quad (6.11)$$

$$N_{x1}=K_{mc}(0.7181+0.1224\cos\lambda) \quad (6.12)$$

$$N_{x2}=K_{mc}(0.00295-0.00295\cos 2\lambda) \quad (6.13)$$

$$N_{y1}=-0.1643 K_{mc}\sin\lambda \quad (6.14)$$

$$N_{y2}=0.00321 K_{mc}\sin 2\lambda \quad (6.15)$$

なお(6.7)式は円軌道モデルによる数値積分以外に、「学習(4)」の(4.6)式、(4.7)式の平均トルク $K_{sc}\sin 2\varepsilon$ を応用することにより次のように求められる。

平均値トルク N_x の

$$\text{最大値 } \text{Max}=K_{mc}\sin 2(\varepsilon+i)$$

$$\text{最小値 } \text{Min}=K_{mc}\sin 2(\varepsilon-i)$$

$$\text{平均値トルク } N_x \text{ の中央値は } (\text{Max}+\text{Min})/2= \\ (K_{mc}/2)\{\sin 2(\varepsilon+i)+\sin 2(\varepsilon-i)\}$$

$$\text{平均値トルク } N_x \text{ の振幅は } (\text{Max}-\text{Min})/2= \\ (K_{mc}/2)\{\sin 2(\varepsilon+i)-\sin 2(\varepsilon-i)\}$$

これに三角関数の積和の公式を適用すると、次のような近似式が作成される。

$$N_{x1}=K_{mc}\{\sin 2\varepsilon\cos 2i+\cos 2\varepsilon\sin 2i\cos\lambda\} \quad (6.16)$$

ここで $\sin 2\varepsilon\cos 2i$ は直流成分 0.7180、 $\cos 2\varepsilon\sin 2i$ は周期成分の波高値 0.1224 である。このことから、(6.12)～(6.16)において K_{mc} に掛かる数字で表された係数は 1 以下であることがわかる。

日月歳差

歳差は上述の(6.7)と(6.8)の直流成分を合計し $L\sin\varepsilon$ で除すればよい。

$$N_{x1}+N_{x2}=1.2225\text{E}+22+5.0190\text{E}+19 \\ =1.2275\text{E}+22$$

よって移動する角距離 θ_{md} を日(day)の関数

として表すと

$$\theta_{md} = (1.2275 \times 10^{22} / L \sin \epsilon) \times (180/\pi) \times 3600 \times 86400 = 0.0939''/\text{day} \quad (6.17)$$

月による年間の歳差は、上式に 365.2422 日を掛けると 34.285''/年となる。これに「学習(4)」で求めた円軌道による太陽の年間の歳差 15.938''/年を合算すると円軌道による年間の日月歳差は 50.223''/年となる。これにより日月歳差の公表値 50.385''/年 [2]は、円軌道による平均歳差の 1.003 倍となる。また、実トルクによる 50.471''/年は平均歳差の 1.005 倍となる。

18.6 年周章動楕円

まず角速度 ω_{ml} を

$$\begin{aligned} \omega_{ml} &= 2\pi / (6793.5 \times 86400) \\ &= 1.0705 \times 10^{-8} \text{ rad/s} \end{aligned}$$

とする。また rad $\rightarrow$ '' の換算係数は $(180/\pi) \times 3600 = 206265$ である。

(6.12)式と (6.14)式の周期成分の λ に $\lambda = \omega_{ml}t$ を代入して積分する。そして、それを L で除せば角距離が求まる。尚、(6.16)式の $\cos 2\epsilon \sin 2i$ は、0.1224 である。

$$\begin{aligned} \theta_{x1} &= 0.1224 \left(\frac{K_{mc}}{\omega_{ml}L} \right) \sin(\omega_{ml}t) \\ &= 6.8526'' \sin\left(\frac{2\pi}{6793.5} \text{ day}\right) \quad (6.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{y1} &= 0.1643 \left(\frac{K_{mc}}{\omega_{ml}L} \right) \cos(\omega_{ml}t) \\ &= 9.1986'' \cos\left(\frac{2\pi}{6793.5} \text{ day}\right) \quad (6.19) \end{aligned}$$

上式の計算結果のグラフを図 6.5 と図 6.6 に示す。ウーランドの周章動とぴったりと重なっている。(詳細 表 6.3A,B 参照)

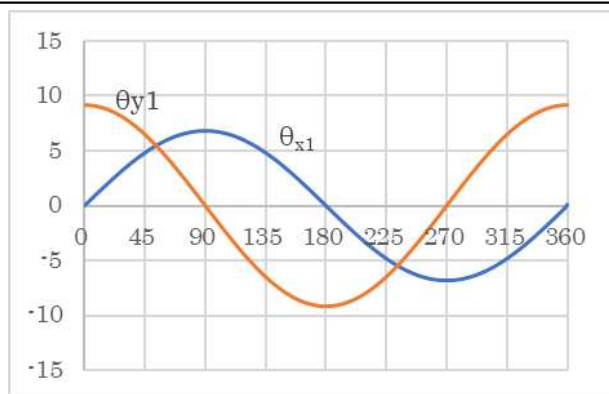


図 6.5 18.6 年周章動

横軸 時間 度 360° = 6793.5 日

縦軸 θ_{x1} θ_{y1} 単位''

9.3 年周章動楕円

同様に (6.13)式と (6.15)式の λ に $\lambda = \omega_{ml}t$ を代入して積分する。

$$\begin{aligned} \theta_{x2} &= -0.00295 \left(\frac{K_{mc}}{2\omega_{ml}L} \right) \sin(2\omega_{ml}t) \\ &= -0.0825'' \sin\left(\frac{4\pi}{6793.5} \text{ day}\right) \quad (6.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{y2} &= -0.00321 \left(\frac{K_{mc}}{2\omega_{ml}L} \right) \cos(2\omega_{ml}t) \\ &= -0.0899'' \cos\left(\frac{4\pi}{6793.5} \text{ day}\right) \quad (6.21) \end{aligned}$$

9.3 年周章動楕円の大きさは 18.6 年周章動楕円の約 1/100 である。

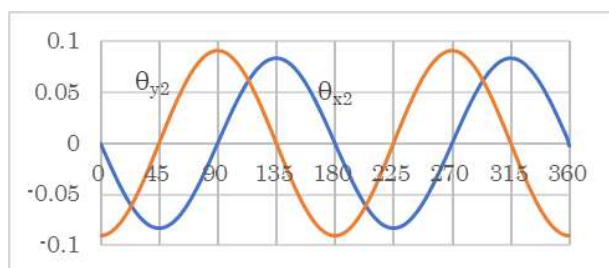


図 6.6 9.3 年周章動

横軸 時間 度 360° = 6793.5 日

縦軸 θ_{x2} θ_{y2} 単位''

図 6.7 に 18.6 年周章動パターンと平均章動のリサージュ図形を示す。

内側の 18.6 年周平均章動は外側の章動パターンよりやや小さいもののほとんど同じである。平均章動は極めて微小ながらも一つ存在し、図 6.8 にそのリサージュ図形を示す。また、「まとめ」の表 6.3A,B に上記の計算結果である平均章動とウーラードの章動表との比較を示す。

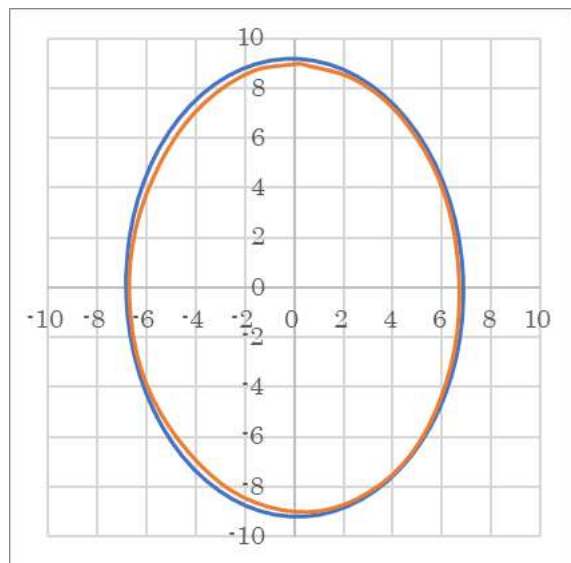


図 6.7 18.6 年周章動パターン
実トルク対応（外側の楕円）
平均章動（内側の楕円）
大きさ $6.85'' \times 9.20''$

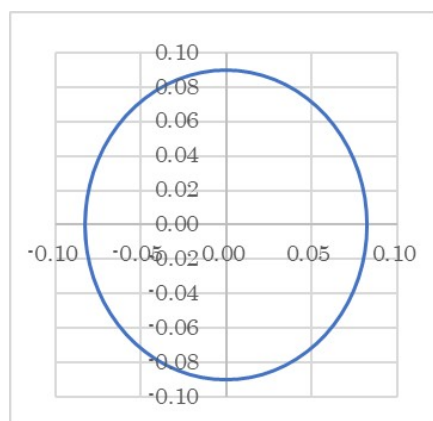


図 6.8 9.3 年周平均章動
大きさ $0.08'' \times 0.09''$

3.3 数式の導出 半月周章動

図 6.9 は「学習(5)」で求めた図 5.9 のフーリエ章動の振幅（ドット）に円軌道モデルで計算した表 6.1 の章動楕円の振幅（線）を重ねたものである。円軌道モデルの計算は昇交点の変化を容易に細かくできるのでここでは線として表示されている。

円軌道においては章動パターンが平均章動となるので、フーリエ章動と平均章動は同質のものとして比較できる。

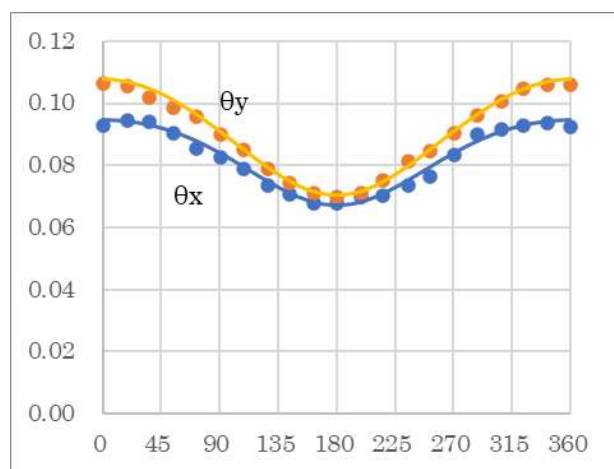


図 6.9 昇交点 λ_Ω と
振幅 θ_x, θ_y の関係 単位"
横軸 時間 度 $360^\circ = 6793.5$ 日

ここで円軌道による平均章動を近似式で表現しよう。図 6.9 を眺めると左右対称で、図 6.2 の N_x と相似していることがわかる。つまり、(6.7)式を導いた方法で近似式を作成できることわかる。

まず春分点近傍を通る平均章動は、太陽の式から以下のように導ける。

「学習(4)」より

$$\theta_x = -\frac{K_{sc}}{2L\omega_s} \sin 2\varepsilon \sin 2\lambda \quad \text{rad} \quad (4.13)$$

ここで上式の定数を太陽から月に差し替えると

$$K_{mc} = 3GM(C-A)/4R^3 = 1.7026 \times 10^{22}$$

$$\omega_{ms} = \frac{2\pi}{27.3217 \times 86400} \text{ rad/s}$$

$$\text{最大値 Max} = \frac{K_{mc}}{2L\omega_{ms}} \sin 2(\varepsilon + i)$$

$$\text{最小値 Min} = \frac{K_{mc}}{2L\omega_{ms}} \sin 2(\varepsilon - i)$$

(6.16)式の導出過程から図 6.9 の振幅は

$$\theta_x = \frac{K_{mc}}{2L\omega_{ms}} \left\{ \sin 2\varepsilon \cos 2i + \cos 2\varepsilon \sin 2i \cos \left(\frac{2\pi}{6793.5} \text{ day} \right) \right\} \text{ rad} \quad (6.22)$$

dayの初期値は円軌道の前提から、観測期間の初日に設定する。

次に θ_y は「学習(4)」より

$$\theta_y = \frac{K_{sc}}{L\omega_s} \sin \varepsilon \cos 2\lambda \quad \text{rad} \quad (4.14)$$

上式を前述の(6.22)式と対比させると直ちに下式が求まる。

$$\theta_y = \frac{K_{mc}}{L\omega_{ms}} \left\{ \sin \varepsilon \cos i + \cos \varepsilon \sin i \cos \left(\frac{2\pi}{6793.5} \text{ day} \right) \right\} \text{ rad} \quad (6.23)$$

(6.22)式と(6.23)式の day を観測開始日から連続して入力するならば、振幅が 6793.5 日に渡って連続的に変化する波形が得られる。それは式で表すと次のようになる。

$$x = -\theta_x \sin 2 \left(\frac{2\pi}{27.3217} \text{ day} \right) \text{ rad} \quad (6.24)$$

$$y = \theta_y \cos 2 \left(\frac{2\pi}{27.3217} \text{ day} \right) \text{ rad} \quad (6.25)$$

図 6.10 は上式をグラフ化したものである。横軸の通日は、18.6 年周章動の観測開始日 2025 年 2 月 2 日を 0 日としたものである。グラフは曲線が密なため塗りつぶされているが、 θ_y に θ_x のグラフを張り付けてある。従って、 θ_y と θ_x の正の包絡線は図 6.9 の曲線と一致する。

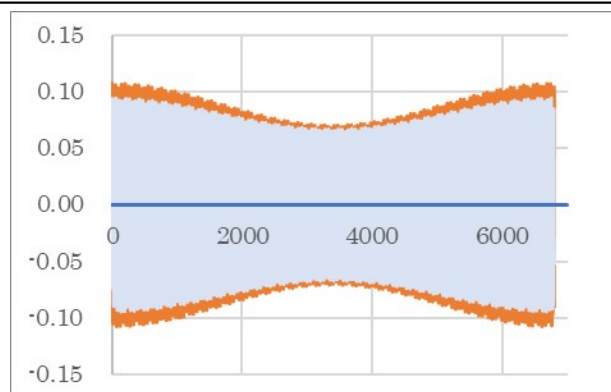


図 6.10 月の平均章動の変化

横軸 観測開始日からの通日

縦軸 θ_x 内側 θ_y 外側 単位"

ここで図 6.10 の横軸を拡大すると月の詳細な章動波形が現れる。図 6.11 は図 6.10 の通日 6793.5 の 1/4 あたりの 28 日（月 1 回転分）の月の章動波形を拡大表示したものである。これは変化する振幅のほぼ平均値に相当する。

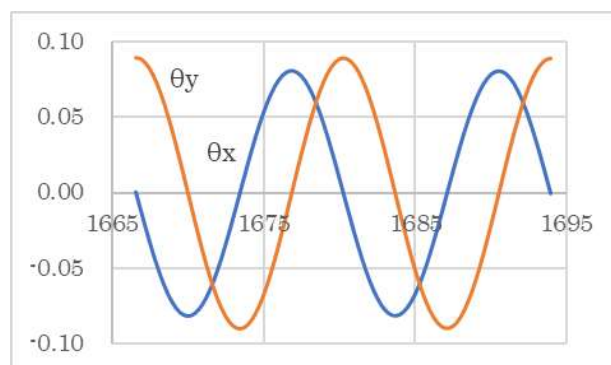


図 6.11 月の平均半月章動 $\theta_x \theta_y$ 単位"

横軸 観測開始日からの通日

さらに、9.3 年周章動を求めたのと同様の方法で振幅 $\theta_x \theta_y$ の倍角二次成分を求めることができる。参考までに得られた結果のみを以下に示す。

$$\theta_x = 0.0016'' - 0.0016'' \cos 2\lambda \quad (6.26)$$

$$\theta_y = 0.0010'' - 0.0010'' \cos 2\lambda \quad (6.27)$$

次の図 6.12 は上式をグラフ化したもので、1/1000'' 台の極めて微小なものである。

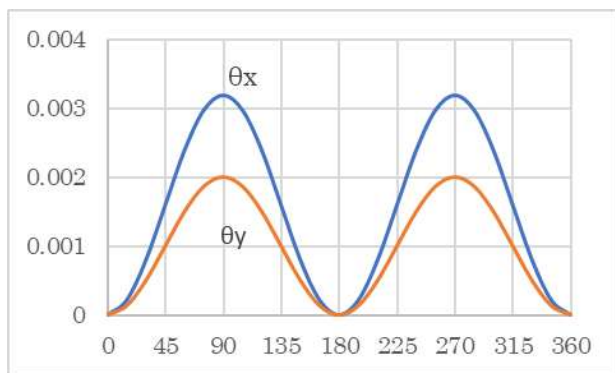


図 6.12 振幅の変化 二次成分 単位"
横軸 時間 度 360°=6793.5 日

これまでの内容を具体的に数値計算すると
以下ようになる。

θ_x は、最大値 $\text{Max}=0.0946''$

最小値 $\text{Min}=0.0671''$ であるから

$$\theta_x = 0.0808'' + 0.0138'' \cos \lambda \quad (6.28)$$

θ_y は、最大値 $\text{Max}=0.1077''$

最小値 $\text{Min}=0.0706''$ であるから

$$\theta_y = 0.0892'' + 0.0186'' \cos \lambda \quad (6.29)$$

かくして、上記の振幅にて(6.24)式と
(6.25)式にて章動楕円を形成することができる。振幅の最大値、平均値、最小値は(6.28)
式と(6.29)式の λ に $0^\circ/90^\circ/270^\circ/180^\circ$ を代入
して、 $\theta_x \times \theta_y = 0.095'' \times 0.108'' \quad 0.081'' \times$
 $0.089'' \quad 0.067'' \times 0.071''$ となる。図 6.13 は
上記の結果をグラフ化した章動楕円である。

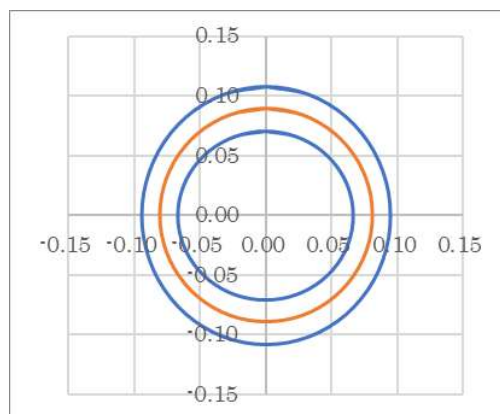


図 6.13 月の半月章動楕円 単位 "

上図にはウーラード半月周章動 24 項の章
動楕円も表示してある。中間にあるものがそ
うであるが、両者はぴったりと重なりあつて
いる。

ところで太陽の場合、 θ_x と θ_y の関係は

$$\text{「学習(4)」から } \theta_x / \theta_y = \cos \varepsilon \quad (4.15)$$

で表された。そこで図 6.13 を上式の関係を用
いて $\theta_x / \theta_y = \cos \theta_m$ で示したものが図 6.14
である。

数式は(6.22)式と(6.23)式で与えられ

θ_m の最大は昇交点 $0/360^\circ$ の時で

$$\cos \theta_m = \cos (\varepsilon + i) \quad \theta_m = 28.6^\circ$$

最小は昇交点 180° の時で

$$\cos \theta_m = \cos (\varepsilon - i) \quad \theta_m = 18.3^\circ$$

平均は昇交点 $90/270^\circ$ 時で

$$\cos \theta_m = \frac{\cos 2i}{\cos i} \cos \varepsilon \quad \theta_m = 25.0^\circ \text{ であり}$$

$\varepsilon = 23.4^\circ$ よりやや大きくなる。

尚、 $i=0$ の時は $\cos \theta_m = \cos \varepsilon$ (太陽の式) と
なる。

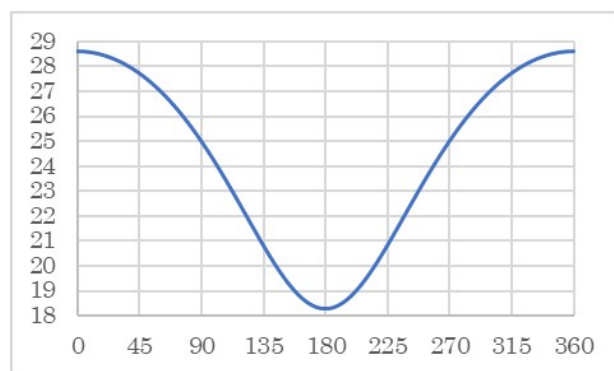


図 6.14 振幅 $\theta_x / \theta_y = \cos \theta_m$ の関係

横軸 時間 度 360°=6793.5 日

縦軸 θ_m 単位 度

4 まとめ

4.1 数式のまとめ

計算定数 $K=3GM(C-A)/4R^3$

月 $K_{mc}=1.7026 \times 10^{22}$

太陽 $K_{sc}=7.8190 \times 10^{21}$

rad $\rightarrow$ "の換算式

$$\text{rad} \times \frac{180}{\pi} \times 3600 = \text{rad} \times 206265 "$$

具体的な数値は表 6.2 の定数表を参照。

時間は、1 日 (day) を単位とする通日。尚、章動楕円は黄道傾斜角 ε の影響を受けるため、表中の値は観測期間 16.8 年の中間値である 2034 年頃の計算値を採用した。月の場合、day は 18.6 年周章動の観測開始日 2025 年 2 月 2 日を 0 日とする。太陽の場合、春分の日を day=0 日とする。

歳差

月 (6.13)式 + (6.16)式 + (6.17)式

$$\theta_{dm} = \frac{K_{mc}}{L \sin \varepsilon} \{ \sin 2\varepsilon \cos 2i + 0.003 \} \times 86400 \times \text{day} \quad \text{rad} \quad (6.30)$$

太陽 (4.10)式

$$\theta_{ds} = \frac{2K_{sc} \cos \varepsilon}{L} \times 86400 \times \text{day} \quad \text{rad} \quad (6.31)$$

章動楕円

月の 18.6 年周章動 (6.18)式 (6.19)式

$$\theta_x = \frac{K_{mc}}{L} \cos 2\varepsilon \sin 2i \times \frac{6793.5 \times 86400}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi}{6793.5} \text{day} \right) \quad \text{rad} \quad (6.32)$$

$$\theta_y = 0.1643 \times \frac{K_{mc}}{L} \times \frac{6793.5 \times 86400}{2\pi} \cos \left(\frac{2\pi}{6793.5} \text{day} \right) \quad \text{rad} \quad (6.33)$$

月の 9.3 年周章動 (6.20)式 (6.21)式

$$\theta_x = -0.001475 \times \frac{K_{mc}}{L} \times \frac{6793.5 \times 86400}{2\pi} \sin 2 \left(\frac{2\pi}{6793.5} \text{day} \right) \quad \text{rad} \quad (6.34)$$

$$\theta_y = -0.001605 \times \frac{K_{mc}}{L} \times \frac{6793.5 \times 86400}{2\pi} \cos 2 \left(\frac{2\pi}{6793.5} \text{day} \right) \quad \text{rad} \quad (6.35)$$

表 6.2 定数表

G 重力定数	$6.6743 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$
A 地球の慣性モーメント 赤道軸まわり	$8.0096 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$
C 地球の慣性モーメント 極軸まわり	$8.0359 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$
L 地球の角運動量 L = ωC	$5.8599 \times 10^{33} \text{ kg m}^2/\text{s}$
ε 地球の黄道傾斜角	23.4348° (2034 年頃の値)
M _m 月の質量	$7.3459 \times 10^{22} \text{ kg}$
R _m 月と地球の距離	$3.8440 \times 10^8 \text{ m}$
i 月の平均軌道傾斜角	5.1567°
K _{mc} 月の計算定数	1.7026×10^{22}
M _s 太陽の質量	$1.9884 \times 10^{30} \text{ kg}$
R _s 太陽と地球の距離	1au $1.4960 \times 10^{11} \text{ m}$
K _{sc} 太陽の計算定数	7.8190×10^{21}

月の半月周章動 (6.22)式 (6.23)式 (6.24)式 (6.25)式

$$\theta_x = -\frac{K_{mc}}{2L} \{ \sin 2\varepsilon \cos 2i + \cos 2\varepsilon \sin 2i \cos(\frac{2\pi}{6793.5} day_m) \} \times \frac{27.3217 \times 86400}{2\pi} \sin 2(\frac{2\pi}{27.3217} day) \text{ rad} \quad (6.36)$$

$$\theta_y = \frac{K_{mc}}{L} \{ \sin \varepsilon \cos i + \cos \varepsilon \sin i \cos(\frac{2\pi}{6793.5} day_m) \} \times \frac{27.3217 \times 86400}{2\pi} \cos 2(\frac{2\pi}{27.3217} day) \text{ rad} \quad (6.37)$$

太陽の半年周章動 (4.13)式 (4.14)式

$$\theta_x = -\frac{K_{sc}}{2L} \sin 2\varepsilon \times \frac{365.2422 \times 86400}{2\pi} \sin 2(\frac{2\pi}{365.2422} day) \text{ rad} \quad (6.37)$$

$$\theta_y = \frac{K_{sc}}{L} \sin \varepsilon \times \frac{365.2422 \times 86400}{2\pi} \cos 2(\frac{2\pi}{365.2422} day) \text{ rad} \quad (6.39)$$

4.2 章動のまとめ

図 6.15 は、前述の 4.1 の数式を使って月の昇交点が一巡する間の章動の変化をグラフ化したものである。もちろんウーラードの章動表ともぴったりと重なっている。

章動は、次の 4.3 の表 6.3A~D に示すように月の 18.6 年周章動と太陽の半年周章動でそのほとんどを占める。図の cos 状と sin 状に変化しているのが月の 18.6 年周章動である。そしてその上に重畳しているギザギザが太陽の半年周章動である。従って、ギザギザは 37 個あることになる。

元期

月 月の軌道 No.0

2025 年 2 月 2 日 15 時 44 分 07 秒 (JST)

ユリウス日 2460708.78064

黄経 2°41'17"(2.69°)

太陽 春分の日

2025 年 3 月 20 日 12 時 (JST)

ユリウス日 2460754.62500 日

これは、月の元期から約 46 日後に相当する。

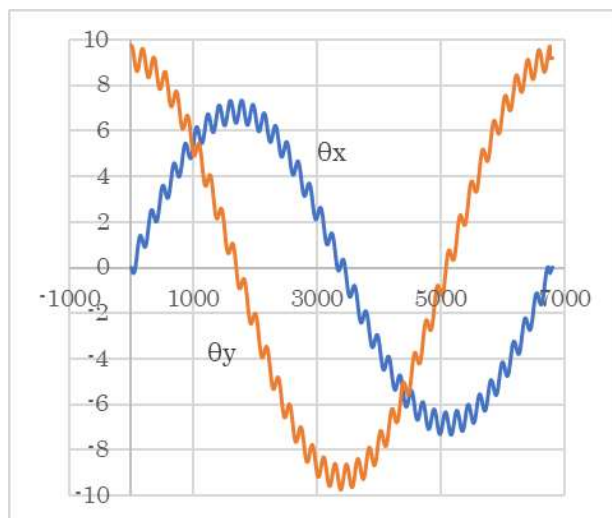


図 6.15 主要章動の変化 単位 “
(月 18.6 年周章動+太陽 半年周章動)

横軸 月の元期を始点とする通日

0~6793.5 日 (18.6 年間)

縦軸 θ_x sin 波 θ_y cos 波

次に、検証のために国立天文台のホームページ掲載の章動の大きさの変化を示すグラフを図 6.16 に示す。(参考サイト[1]) 図 6.15 は黒い縦線の区切られた間に相当する。良く近似していることが見て取れる。

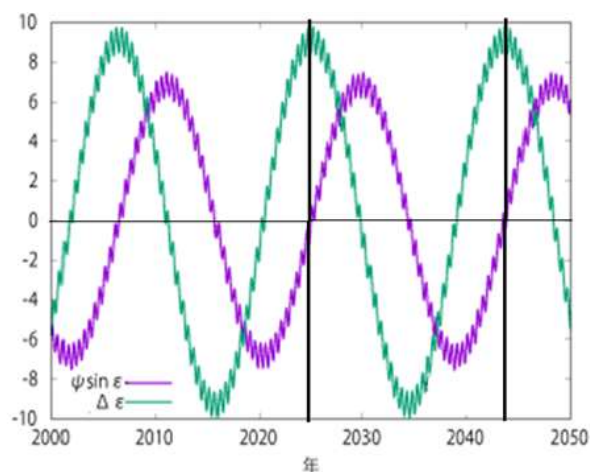


図 6.16 国立天文台の章動変化

横軸 西暦 年

縦軸 振幅の小さなもの θ_x 単位 "振幅の大きなもの θ_y 単位 "

4.3 総合評価

平均章動は円軌道から導かれ、実章動を平均化したものと見なすことができる。また、歳差は平均章動をさらに平均化したものとして与えられる。平均章動とウーラードの章動表はもとより同じものではないが、数学的にはどちらもフーリエ数式により表現される。そのため参考までに表 6.3 にその比較表を掲載した。なお表では、平均章動を定数と想定し、ウーラードの章動を平均値からのズレ(偏差)として扱った。

日月歳差の比較(6.30) (6.31)式

平均歳差 (計算値)

月 $34.285''/\text{年}$ + 太陽 $15.938''/\text{年}$ $=50.223''/\text{年}$ 公表値 $50.385''/\text{年}$ (文献[2])

偏差の比率 0.32%

偏差の比率

 $=\{(\text{公表値} - \text{平均歳差}) / \text{平均歳差}\} \times 100\%$

章動の比較 (小数点以下精密計算)

表 6.3 平均章動 (計算値) とウーラードの章動表 (表 1.1 参照) の比較

偏差の比率=

$$\{(\text{ウーラード章動表}-\text{平均章動})/\text{平均章動}\} \times 100\%$$

表 6.3A 月 18.6 年周章動 (6.32) (6.33) 式

	θ_x	θ_y
平均章動	$6.8526''$	$9.1986''$
ウーラード	$6.8535''$	$9.2100''$
偏差の比率	0.01%	0.12%

表 6.3B 月 9.3 年周章動 (6.34) (6.35) 式

	θ_x	θ_y
平均章動	$0.0825''$	$0.0899''$
ウーラード	$0.0830''$	$0.0904''$
偏差の比率	0.58%	0.51%

表 6.3C 月半月周章動 (6.36) (6.37) 式

	θ_x	θ_y
平均章動	$0.0808''$	$0.0892''$
ウーラード	$0.0810''$	$0.0884''$
偏差の比率	0.20%	-0.88%

月の半月の平均章動は昇交点の黄経 $90^\circ/270^\circ$ を近似式 (6.36) 式と (6.37) 式にて計算。表 6.1 とはわずかの差があるが、これは前述の (6.26) 式と (6.27) 式及び図 6.12 によって補正される。

表 6.3D 太陽半年周章動 (6.37) (6.39) 式

	θ_x	θ_y
平均章動	$0.5044''$	$0.5497''$
ウーラード	$0.5062''$	$0.5522''$
偏差の比率	0.36%	0.45%

4.4 186 年周章動

図 6.17 は 18.6 年の前後で比較した月の章動パターンである。かなりのズレがあることがわかる。章動は 18.6 年周期で一巡するとされるが、厳密には月の昇交点がぴったりと一致することではなく、ズレが生じる。月の軌道は永遠にズレ続けると言っても過言ではないであろう。

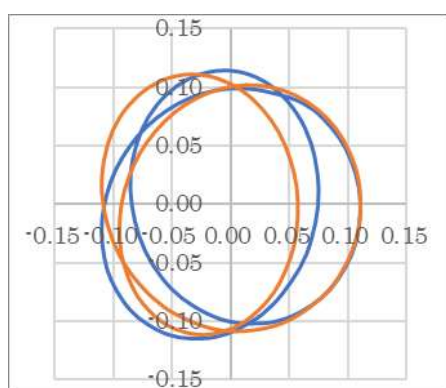


図 6.17 18.6 年前後の月の章動パターンの比較 単位"

しかし、月の近地点の周期約 8.85(参考サイト[2])を考慮した 186 年周期においては、図 6.18 に示すようにズレはかなり減少している。186 年の間の回転数は、昇交点 10 回、近地点 $186/8.85=21.017$ 回である。このため 186 年周期は 18.6 年周期より高精度な相似となることがわかる。

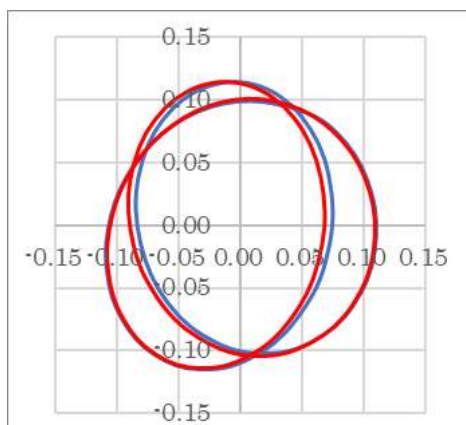


図 6.18 168 年前後の月の章動パターンの比較 単位"

186 年周期は月の軌道が約 2500 本にもなるが、学校間の連携をおこなえば計算できないことはない。エクセルの入力データ数は 4096 個まで処理できるので、上記の平均トルクをフーリエ解析すれば、186 年周期～18.6 周期の新たな章動楕円を求めることができる。それはおそらく $0.0001''$ を越えるものとなるであろう。これはもはや冒険型学習課題と言えよう。

文 献

- [1] 福島登志夫 編(2017)『天体の位置と運動 (シリーズ現代の天文学第 13 巻)』, 日本評論社, pp.219-221
- [2] 天文年鑑編集委員会(2023)『天文年鑑』2024 年版, 成文堂新光社, pp.210

参考サイト

- [1] 暦 Wiki/章動 - 国立天文台暦計算室
<https://eco.mtk.nao.ac.jp/koyomi/wiki/BECFC6B0.html>
- [2] 暦 Wiki/月の公転運動/近地点と遠地点 - 国立天文台暦計算室
<https://eco.mtk.nao.ac.jp/koyomi/wiki/B7EEA4CEB8F8C5BEB1BFC6B02FB6E1C3CFC5C0A4C8B1F3C3CFC5C0.Html>



江頭 務