

投稿

天文教育における探究型学習課題(4)

～天文ソフトとエクセルで体感する歳差章動のメカニズム～

東亜天文学会 江頭 務

1. はじめに

ここでは最初に、前回の「学習(3)」の観測結果をベースに太陽の歳差章動を計算する。さらに、実波形から章動パターンを抽出する。説明は「学習(3)」のエクセル画面に従って進める。しかしながら、フーリエ解析は歳差章動のメカニズムを教えてくれるわけではない。そのため、次に円軌道による平易な歳差章動の数式表現を試みる。最後にまとめとして、吊り下げ式地球ゴマによる実験により章動のメカニズムの直感的なイメージを得る。

2. 観測データからの計算

2.1 歳差

図 4.1 は、春分点付近を起点とする時間に対する θ_x θ_y の角距離の変化を示したものである。

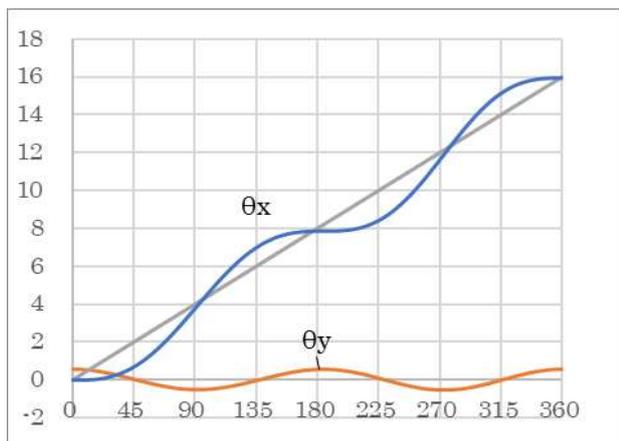


図 4.1 θ_x と θ_y の角距離の変化 単位 " 横軸 時間 (360° = 365日 春分の日 0°)

エクセル画面 表 3.2C A 列

—表 3.2C E 列、—表 3.2D S 列

θ_x : $\Delta\phi \sin\epsilon$ θ_y : $\Delta\epsilon$

θ_x にゆらぎが認められるがこれが章動の θ_x 成分である $\Delta\phi$ である。(図 4.2 の章動よりも大きくなることに注意) 他方の θ_y は $\Delta\epsilon$ である。そして、このゆらぎを除去したものが図 θ_x の直線である。これが歳差であり、直線の傾きは歳差の平均角速度となる。数値積分の 360° における角距離は $15.947''$ であるから、これが太陽の年間の歳差となる。太陽の年間の歳差は約 $16''$ /年である。この時の平均トルク (表 3.2B Q114) は、 $N_x=5.7093E+21$ である。

2.2 章動

章動の定義は『理化学辞典』[1]では、「地球の自転軸の天球に対する方向が、月および太陽の引力を受けて生じる変化のうち、周期的部分をいう」とある。納得の定義だが、ここでは力学的に一步踏み込んで「月や太陽が近似的に閉じた軌道を 1 回転した時に地球が受ける全トルクから、その平均トルクを除去した時に起こる自転軸の周期的運動」としたい。平均トルクは歳差で、残りの章動におけるトルク積分値は 0 である。フーリエ解析で例えれば、歳差は直流成分、章動は周波数成分に相当する。「学習(3)」で述べたエクセルの計算式は上記の考え方に基づいて作成したものである。

図 4.1 を「学習(3)」図 3.3 の地球の自転軸の動きとして見ると、章動を形成する θ_x は $\Delta\phi \sin\epsilon$ 、 $\Delta\theta_y$ は $\Delta\epsilon$ で表される。図 4.2 は上記をグラフ化したものである。

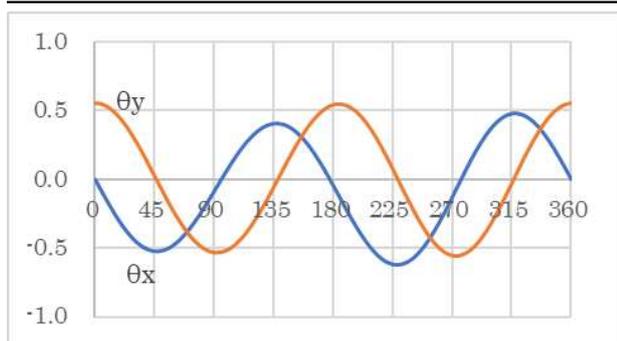


図 4.2 章動の角距離の変化 単位 "
 横軸 時間 (360° =365日 春分の日 0°)
 エクセル画面 表 3.2D A列-M列,S列
 $\theta_x : \Delta \psi \sin \varepsilon \quad \theta_y : \Delta \varepsilon$

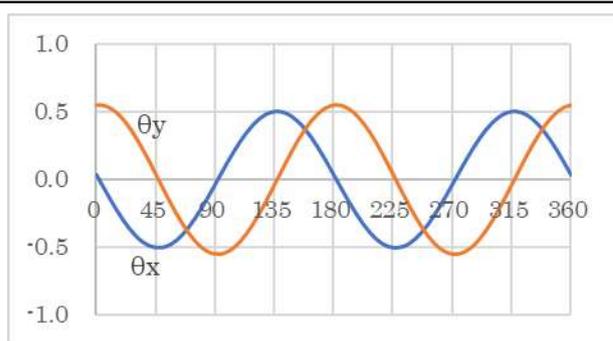


図 4.3 章動楕円の角距離の変化
 ウーラード章動表 2 項
 グラフの内容は図 4.2 (左図) と同じ

ウーラードの計算式 「学習(1)」参照

元期 1900年1月0日12時
 (1899年12月31日12時) UT
 ユリウス日 2415020.000日
 観測開始日 (春分の日)
 2025年3月20日12時 JST
 ユリウス日 2460745.625日
 元期から春分の日までの経過日数
 day=45734.625日

$$\Delta \psi \sin \varepsilon = -0.506'' \sin 2(-80.303322 + 0.9856473354 \text{day}) \quad (4.1)$$

$$\Delta \varepsilon = 0.552'' \sin 2(-80.303322 + 0.9856473354 \text{day}) \quad (4.2)$$

図 4.3 は学習(1)で紹介したウーラードの章動表の 2 項を計算したものである。本稿の太陽の計算の起算日は、2025年3月20日春分の日である。図 4.3 は太陽の主要章動を計算したものであり、章動表には太陽に関わる章動要素が微小ながらも他にもあるので、厳密には部分的な表示である。

図 4.2 と図 4.3 は良く近似しているが、仔細に見ると異なる部分もある。図 4.2 は実際のトルクをもとに計算したもので、顕著なところでは θ_x の波高値が前後で異なっていることがわかる。それに対し、図 4.3 は章動楕円なので波高値はすべて揃っている。この関係は、リサージュ図形で比較するとはっきりする。それが次に検討する章動パターンである。

章動パターン

図 4.2 の θ_x と θ_y の関係を x 軸と y 軸に入力して得られたものが図 4.4 の章動のリサージュ図形である。以後、これを章動パターンと呼ぼう。章動パターンは N_x より N_x の平均トルクを抜き取るにより形成される。この抜き取りトルク即ち平均トルクは精密さを要するために台形法を用いている。試してみるとわかることだが平均トルクに誤差があるとループが閉じないことになる。例えば、エクセル画面 表 3.2D の J 列の数式は =P21-\$Q\$114 であるが、この抜き取りトルク \$Q\$114 が台形法で求めた N_x の平均トルク 5.7093E+21 である。この値を少し変えるだけで、ループが前後に破れることがわかる。ループの形状は平均してみればほぼ楕円状で

ある。太陽の章動パターンは近日点の有無によって二種類あり、内回りの円と外回りの円に分かれる。内回りの円は太陽が春分-夏至-秋分、外回りの円は秋分-冬至-春分の間に位置する。近日点は1月4日頃にある。実章動の θ_x 方向の変化が大きいのは、図 4.2 の θ_x の波高値の変化が大きいことから納得する。一方、 θ_y 方向の波高値の変化はあまりない。

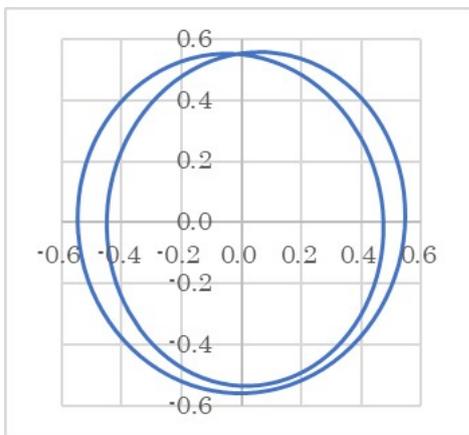


図 4.4 太陽の章動パターン (1 年間)
横軸 θ_x 縦軸 θ_y 単位 "
エクセル画面 表 3.2D M 列-Q 列

図において y 軸上の+側にある円の座標 (0,0.556) 付近が自転軸の出発点で、x 軸の-側に向かって左回転している。最初は内側の円を進み、約 1 回転 (半年) したところで外側の円を進み元の座標に戻る。回転数は 2 回転 (1 年) で、大きな円は近日点の影響である。

図 4.5 は、図 4.4 にウーラードの章動表とフーリエ解析の章動楕円を張り付けてある。両者は見た眼にはほとんど重なっている。両者の振幅の差は最大でも約 1% である。詳細は、「学習(3)」の表 3.5 を参照していただきたい。次項で検討するように、ウーラードの章動表とフーリエ解析の章動楕円は章動パタ

ーンを平均化したものとして扱うことができる。

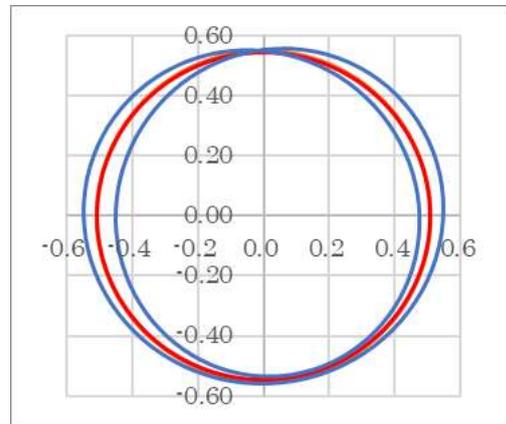


図 4.5 太陽の章動パターン (1 年間)
横軸 θ_x 縦軸 θ_y 単位 "
エクセル画面 表 3.2D M 列-Q 列
中央の楕円はウーラードとフーリエ解析の章動楕円

3. 円軌道モデルによる歳差章動

太陽の歳差章動は、太陽の軌道を円軌道におきかえることにより計算式を作成することができる。トルクの一般式は下式に示すように二つの変数 δ と α が含まれているが、太陽の軌道を円軌道に近似した場合には球面三角法によって、黄経 λ の一つの変数のみの簡単な数式で表現することができる。

$$N = \frac{3GM}{2R^3} (C - A) \sin 2\delta \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

図 4.6 は、太陽の位置を赤道座標と黄道座標で示したものである。図において、天体の赤経 α 、赤緯 δ 、黄経 λ は球面直角三角形を構成している。これに球面直角三角形の公式を適用して

$$\textcircled{1} \quad \sin \delta = \sin \lambda \sin \epsilon \quad \textcircled{2} \quad \cos \delta \sin \alpha = \sin \lambda \cos \epsilon \quad \textcircled{3} \quad \cos \delta \cos \alpha = \cos \lambda \text{ を導く。}$$

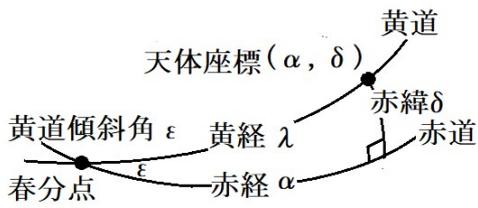


図 4.6 球面直角三角形で表された天体の位置

これにより、まず N_x を求めよう。

$$N_x = \frac{3GM}{2R^3} \sin 2\delta (C - A) \sin \alpha$$

$$= \frac{3GM(C-A)}{R^3} \sin \delta \cos \delta \sin \alpha$$

N_x の $\sin \delta \cos \delta \sin \alpha$ の部分は①②を適用して

$$\sin \lambda \sin \epsilon \sin \lambda \cos \epsilon = \sin \epsilon \cos \epsilon \sin^2 \lambda$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2\epsilon \sin^2 \lambda \quad \text{となるので}$$

$$N_x = \frac{3GM}{2R^3} (C - A) \sin 2\delta \sin \alpha$$

$$= \frac{3GM(C-A)}{2R^3} \sin 2\epsilon \sin^2 \lambda \quad (4.3) \text{となる}$$

る。

ここまでは、参考書等[2,3]でも述べられているところである。本稿は、さらに上式を倍角の公式 $\cos 2\lambda = 1 - 2\sin^2 \lambda$ を用いて、以下のように定数部分と変数部分に分離する。これが章動の計算において極めて重要である。

$$N_x = \frac{3GM(C-A)}{4R^3} \sin 2\epsilon (1 - \cos 2\lambda) \quad (4.4)$$

次に、 N_y は

$$N_y = -\frac{3GM}{2R^3} \sin 2\delta (C - A) \cos \alpha$$

$$= -\frac{3GM(C-A)}{R^3} \sin \delta \cos \delta \cos \alpha$$

これに①③を適用して

$$N_y = -\frac{3GM(C-A)}{2R^3} \sin \epsilon \sin 2\lambda \quad (4.5)$$

今、太陽の質量を M_s として、

$$K_{sc} = \frac{3G_s(C-A)}{4R^3} \quad (4.6)$$

と置くならば、(4.4) 式と(4.5) 式は以下のように簡潔に記述される。

$$N_x = K_{sc} \sin 2\epsilon (1 - \cos 2\lambda) \quad (4.7)$$

$$N_y = -2K_{sc} \sin \epsilon \sin 2\lambda \quad (4.8)$$

地球の場合 $K_{sc} > 0$ であるから、(4.7) 式の N_x は常に $N_x \geq 0$ であることがわかる。次に(4.7) 式の $K \sin 2\epsilon$ 歳差成分を歳差の角速度 $\dot{\theta}_{sd}$ に換算すると

$$\dot{\theta}_{sd} = \frac{2K_{sc} \cos \epsilon}{L} \quad (4.9)$$

ここで L は地球の角運動量である。歳差によって移動する角距離 θ_{sd} を時間 t 秒の関数として表すと

$$\theta_{sd} = \frac{2K_{sc} \cos \epsilon}{L} t \quad (4.10) \quad \text{となる。}$$

太陽による年間歳差の計算

まず前回の表 3.1 の基礎データの値を(4.6) 式に代入して K_{sc} を求める。

$$K_{sc} = 7.8190 \times 10^{21} \text{ kg m}^2/\text{s}^2 \text{ (Nm)}$$

年間歳差は(4.10)式から

$$\dot{\theta}_{sd} = \frac{2 \times 7.8190 \times 10^{21}}{5.8599 \times 10^{33}} \cos 23.4348^\circ \times 365.2422$$

$$\times 86400 \text{ s} = 7.7268 \times 10^{-5} \text{ rad/年}$$

これを角度の"に換算すると、15.938"/年となる。前述の台形法による実波形と比較すると、円軌道模擬を基準とした一致率は $15.947 / 15.938 = 1.00056$ で、ほとんど同じ結果になった。

次に章動は、(4.7)式の $-K_{sc} \sin 2\epsilon \cos 2\lambda$ が章動の x 成分である。そして(4.8) 式の $-2K_{sc} \sin \epsilon \sin 2\lambda$ が章動の y 成分である。これは太陽の楕円軌道を円軌道に置き換えたものであり、楕円軌道の平均化と見ることができ。それゆえ、円軌道模擬から導かれる章

動楕円を平均章動と呼ぼう。

太陽の章動の x 成分 θ_x と y 成分 θ_y は

$$\theta_x = -\frac{K_{sc}}{L} \sin 2\varepsilon \cos 2\lambda \quad (4.11)$$

$$\theta_y = -\frac{2K_{sc}}{L} \sin \varepsilon \sin 2\lambda \quad (4.12)$$

となる。上式を $\lambda = \omega_s t$ とおいて時間 t 秒で積分すると

$$\begin{aligned} \theta_x &= -\frac{K_{sc}}{2L\omega_s} \sin 2\varepsilon \sin 2\omega_s t \\ &= -\frac{K_{sc}}{2L\omega_s} \sin 2\varepsilon \sin 2\lambda \quad \text{rad} \quad (4.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_y &= \frac{K_{sc}}{L\omega_s} \sin \varepsilon \cos 2\omega_s t \\ &= \frac{K_{sc}}{L\omega_s} \sin \varepsilon \cos 2\lambda \quad \text{rad} \quad (4.14) \end{aligned}$$

また、平均章動の x 成分と y 成分の振幅の比は

$$\theta_x / \theta_y = \cos \varepsilon \quad (4.15)$$

となる。平均章動のサイズは、(4.7)式より N_x の平均トルクは $K_{sc} \sin 2\varepsilon$ であるから、 N_x の平均トルク \bar{N}_x がわかれば直ちにわかる。即ち、平均章動のサイズは

$$(\theta_x = \bar{N}_x / 2L\omega_s) \times (\theta_y = \theta_x / \cos \varepsilon) \quad (4.16)$$

となる。

太陽の平均章動の計算

平均章動は(4.13)式と(4.14)式より求められる。

$$\lambda = \omega_s t = 2\pi \frac{t}{365.2422 \times 86400}$$

であるから

$$\omega_s = \frac{2\pi}{365.2422 \times 86400}$$

である。これから、

$$\theta_x = -0.5044'' \sin 2\lambda \quad (4.17)$$

$$\theta_y = 0.5497'' \cos 2\lambda \quad (4.18)$$

となる。これが楕円になることは以下のように簡単に証明できる。上式を一般化して

$$x = A_x \sin \omega t \quad y = A_y \cos \omega t \quad \text{とおくと}$$

$$\frac{x}{A_x} = \sin \omega t \quad \frac{y}{A_y} = \cos \omega t$$

となり、

$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 = \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$$

となる。上記は楕円の式である。尚、 $A_x = A_y$ の時は円となる。上記の関係を図 4.4 の上に重ねたものが図 4.7 である。座標の原点(0,0)は平均章動の中心(平均の極)になるように設定している[4]。後述するように、平均章動、ウーラードとフーリエ解析の章動楕円はほとんど重なっている。

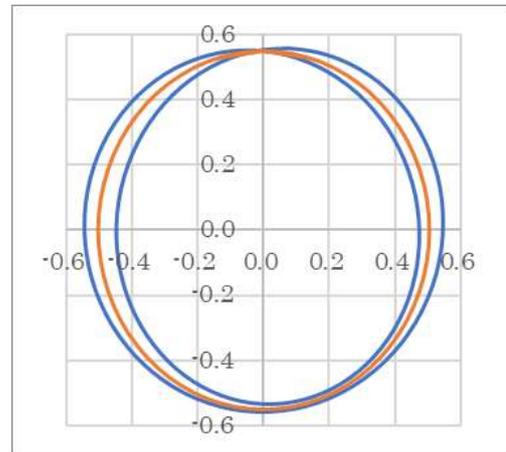


図 4.7 太陽の章動パターンと平均章動
単位 "

エクセル画面 表 3.2D R 列-S 列
平均章動は別枠で(4.17)式 (4.18)式を計算

図 4.7 を見ると平均章動は章動パターンの中間を走っており、平均章動にて章動パターンを近似させることができる。即ち、(4.17)式を春分の日からの通日 day で以下のように表される。

$$\theta_x = -0.5044'' \sin\left(\frac{4\pi}{365.2422} \text{ day}\right) \quad (4.19)$$

$$\theta_y = 0.5497'' \cos\left(\frac{4\pi}{365.2422} \text{ day}\right) \quad (4.20)$$

続いて図 4.8 は図 4.7 を時間軸で表したものである。

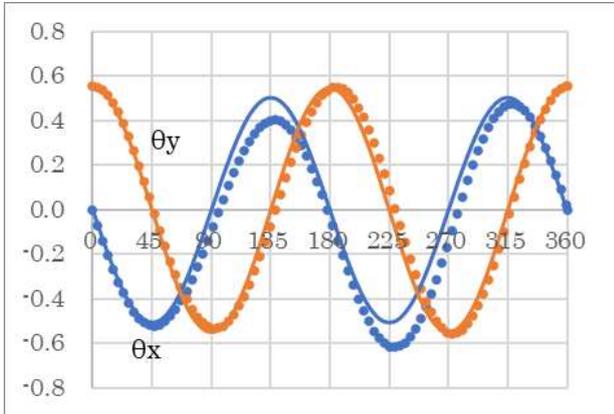


図 4.8 実章動と平均章動の比較 単位 "

実章動 ドット 平均章動 実線

横軸 時間 (360° =365日 春分の日 0°)

縦軸 $\theta_x: \Delta\psi \sin \epsilon$ $\theta_y: \Delta\epsilon$

実章動 エクセル画面 表 3.2C A列

—表 3.2D M列,S列

平均章動は別枠で(4.17)式,(4.18)式を計算

図 4.8 において波高値の揃っているのが平均章動で、180°を中心として θ_x は点对称、 θ_y は左右対称である。実章動 θ_y は平均章動とほとんど同じであるが θ_x は 135°と 225°付近で大きくズレていることがわかる。平均章動の振幅は変化しないので、実章動は楕円軌道の影響で 135°付近では円軌道に基づく平均章動よりも小さく、225°付近では大きく振れていることがわかる。このことは、円軌道が楕円軌道の平均化であり、ケプラー運動の平均化につながっていることを示唆している。

章動楕円の総合評価

表 4.1 は平均章動、フーリエ解析、ウーラード章動表により求めた章動楕円の大きさを比較したものである。表の比率は、平均章動を基準値 1 としたものである。

表 4.1 半年周章動楕円の比較 単位 "

	$\Delta\phi \sin \epsilon$ 比率		$\Delta\epsilon$ 比率	
平均章動	0.504	1.000	0.550	1.000
フーリエ解析	0.506	1.004	0.546	0.993
ウーラード	0.506	1.004	0.552	1.004

表 4.1 から平均章動、フーリエ解析、ウーラード章動表は同類のものと考えられる。平均章動は二つの章動円を一つに統合したものであり、フーリエ解析の 2 次成分の発想と同じである。このためフーリエ解析による章動楕円と平均章動との近似性は高いと想定される。

4. 宇宙空間からながめた自転軸の軌跡

4.1. 地球ゴマによる章動の実験

図 4.9 は市販の地球ゴマを長いゴム糸で吊り下げた歳差章動の学習用の実験装置である。

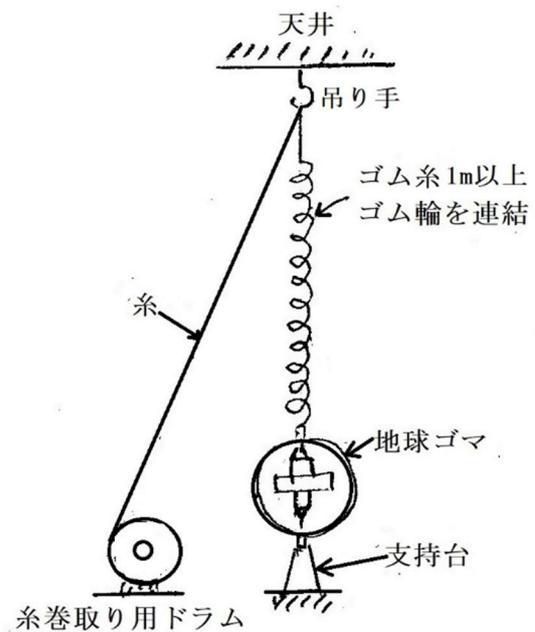


図 4.9 吊り下げ式地球ゴマ

地球の歳差運動は、「学習(2)」で述べたように月と太陽の万有引力が地球の自転軸を立てようとするトルクにより発生する。図 4.9 はこの原理を地球ゴマに適用したものである。詳細は文献[5]を参照願いたい。左回転する地球ゴマを少し傾けておくと、コマは上から見て右回転の歳差運動をおこなう。これは右ネジの法則から明らかであろう。問題は章動のメカニズムである。

実験 1 ゴム糸の張力の増加と減少

ドラムを回しゴム糸の張力を増加させると、コマの歳差運動は加速する。逆にゴム糸の張力を減少すると、コマの歳差運動は減速する。

実験 2 歳差運動の加速と減速

ゴム糸を手を持ち軽く歳差運動を加速すると、コマはゴム糸を引っ張りながら降下する。逆に歳差運動を減速するとコマは上昇する。

上記を合わせて考えると、ゴム糸の張力の増加と減少によって歳差の方向の左右運動が、歳差の加速と減速によって上下運動が発生することがわかる。この左右の運動と上下の運動との組み合わせが章動である。しかし、いかにトルクが大きくとも、その変化がなければ発生しない。また章動はコマの角運動量に反比例するため、コマの回転の勢いが強いところでは微小である。地球は1日に1回転であるがその慣性モーメントはとてつもなく巨大であるため章動は微小である。従って、章動は回転の勢いが弱ったコマにおいて顕著に表れる。

以後、この実験結果をイメージして学習を進めてゆくことにしよう。地球は宇宙空間の浮かぶコマであり、コマとの対比は学習効果を高めるのに役立つであろう。

4.2 宇宙空間からながめた自転軸の軌跡

本稿での基本計算は地球から、言い換えれば赤道座標系からみた天体の動きを見るためのものである。実際に動いているのは地球である。従って、宇宙空間から地球の自転軸の動きを観察するためには、「学習(3)」で述べたように赤道座標系の動きを反転させれば良いことがわかる。図 4.10 にこうして得られた結果を示す。太陽の影響で歳差円を自転軸が一年間に移動する角距離は $\Delta\phi \text{ sine}$ であるから、 $6.4''$ であることが図から見て取れる。また、自転軸は赤道座標上を負の方向に動いていることもわかる。

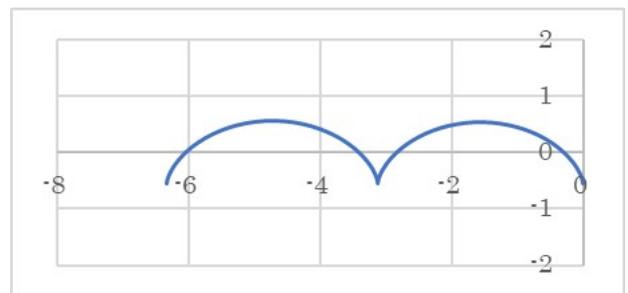


図 4.10 地球の自転軸の動き

横軸 θ_x 縦軸 θ_y 単位 "

エクセル画面 表 3.2D T 列—U 列

次にコマの場合をみてみよう。歳差運動は太陽や月からのトルクが地球の自転軸を黄道面に垂直、黄道傾斜角が 0° になるように作用する。これとコマを対比させると、重力の方向が逆である。これにより、歳差の方向と上下方向が反転する。つまり、図 4.10 を左右上下に反転させた図 4.11 がコマの波形となる。

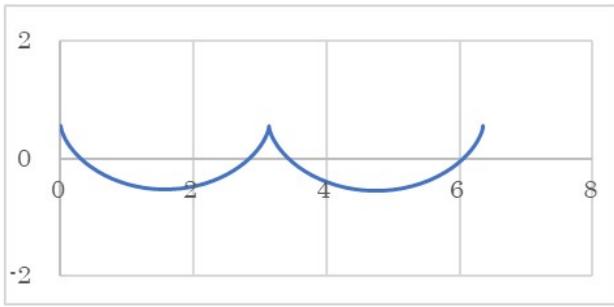


図 4.11 コマの回転軸の動き
横軸 θ_x 縦軸 θ_y 単位 "
エクセル画面 表 3.2D T 列-U 列を反転

ところで図 4.11 の波形は、地球ゴマを支点に少し傾けてそっと置いたときにできる波形である。つまり、水平方向の角速度の初期値が 0 の時の特殊なケースである [6,7]。

これについて、実験としてエクセル画面表 3.2C B151 に次の付加トルク \$B\$140 を代入しよう。\$B\$140 はエクセル画面表 3.2B N_x 台形法平均値 \$Q\$114(5.7093E+21) に係数 k を乗じて計算する。 K は -0.5, 0(規定値), 0.5 あたりが分かりやすいであろう。B151 に代入する式は =P21+\$B\$140 である。付加トルクの増減に応じて波形が変化のを見て取れる。

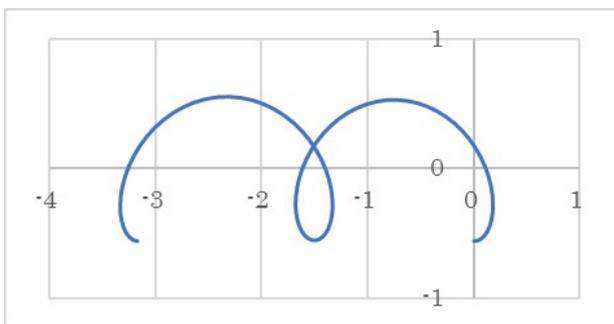


図 4.12 付加トルク N_x 平均値の -0.5 倍
横軸 θ_x 縦軸 θ_y 単位 "
エクセル画面 表 3.2D T 列-U 列

図 4.12 は歳差の方向と逆向きに付加トル

ク (N_x 平均値の 0.5 倍) を与えたケースである。下側にループが形成されるのが特徴である。歳差速度は $6.4''$ /年から $3.3''$ /年に減少する。

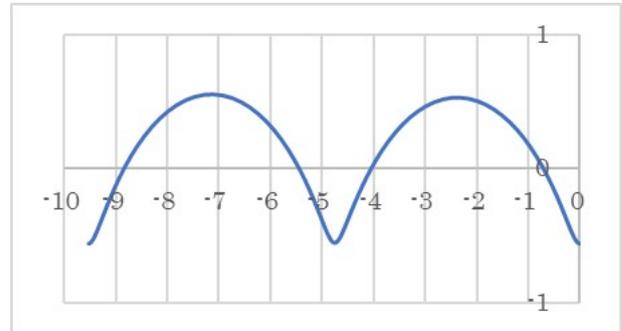


図 4.13 付加トルク N_x 平均値の +0.5 倍
横軸 θ_x 縦軸 θ_y 単位 "
エクセル画面 表 3.2D T 列-U 列

図 4.13 は歳差の方向に付加トルク (N_x 平均値の 0.5 倍) を与えたケースである。コイルバネの両端を無理やり引き延ばした形になるのが特徴である。さらに付加トルクを増大すると sin 波のようになる。歳差速度は $6.4''$ /年から $9.5''$ /年に増大する。

地球も誕生当時は小天体の衝突などによって黄道方向の角速度成分は 0 ではなかったはずである。しかし、悠久の年月を経てそれは摩擦等により消滅した。これは、地球の歳差章動が潮汐トルクのみによって動かされていることの証である。この波形は地球の平和な時代を象徴しているのかもしれない。

4.3 歳差章動トルクの N_y 成分について

歳差章動は自転軸を持ち上げようとするトルクによって起こる。このトルク成分は「学習(2)」で学んだように x 成分と y 成分に分解される。これを表現する数式は幾度も登場する(2.6)式である。

$$N = \frac{3GM}{2R^3} (C - A) \sin 2\delta \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

上式において N_x 成分は分かりやすいが、 N_y 成分は分かりにくいと思われる。というのは、「学習(2)」の図 2.3, 図 2.4 が x 軸を中心に描かれているからと思われる。そこで、 y 軸を中心に描いたのが図 4.14 である。

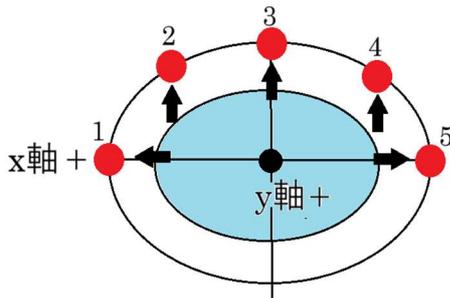


図 4.14 y 軸の正方向を見たトルクの説明図

図の中心部にある楕円は地球で、その外側を回っているのが太陽である。座標は右手系で、「学習(2)」の図 2.4 を 90° 回転させたものである。図中の+の記号は x 軸、 y 軸の正方向を示す。矢印は地球の赤道部の真球からはみ出したふくらみ部にかかる万有引力の方向を示す。

ここで y 軸のトルクを考えると、太陽が 1 の位置にある時は、トルクは 0 である。
 2 の位置ではトルクは右回転-である。
 3 の位置ではトルクは 0 である。
 4 の位置では左回転+である。
 5 の位置ではトルクは 0 である。

上図にて x 軸のトルクも説明できる。 x 軸のトルクは常に左回転+である。そして、1 と 5 の位置で 0、3 の位置で最大となることがわかる。これを、(2.6)式で計算したものが次の図 4.15 のトルクの変化図である。 y 軸 0 線を中心に变化しているのが N_y 、正方向のみの領域で变化しているのが N_x である。両者の

変化は図 4.14 の説明と合致していることがわかる。

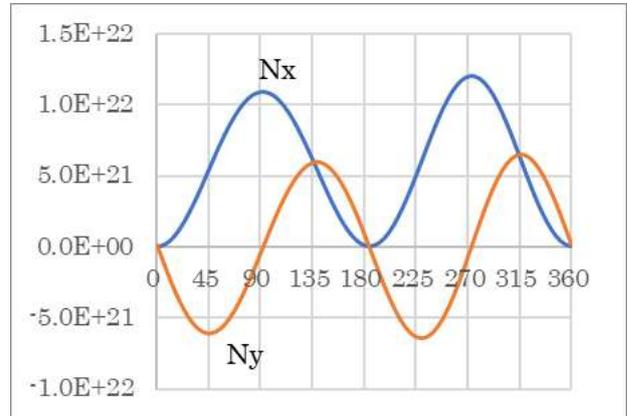


図 4.15 N_x N_y のトルク変化

横軸 時間 ($360^\circ = 365$ 日 春分の日 0°)

縦軸 N_x N_y 単位 Nm

参考文献

- [1] 長倉三郎ほか (1998) 『岩波理化学辞典 第5版』岩波書店, p.654
- [2] 本多了ほか (2013) 『地球の物理学事典』朝倉書店, pp.92-96, pp.450-451
- [3] 福島登志夫 (2017) 『天体の位置と運動(シリーズ現代の天文学第13巻)』日本評論社, pp.210-225
- [4] 日本物理学会編 『天文学辞典』「天の極」 <https://astro-dic.jp/celestial-pole/>
- [5] 江頭務 (2022) 「これならわかる地球の歳差運動」天界, 2022年3, 4, 8, 9月号, 2023年7月号
- [6] 大島隆義 (2012) 『自然は方程式で語る』名古屋大学出版会, pp.431~433
- [7] 安井久一 (1998) 『こまはなぜ倒れないか (物理学演習 One Point3)』共立出版, p.81

江頭 務