

投稿

天文教育における探究型学習課題(2)

～天文ソフトとエクセルで体感する歳差章動のメカニズム～

江頭 務 (東亜天文学会)

1. はじめに

予備学習編は、本稿のテーマがやや専門的であることから本論にはいる前の序章である。ここでは、解析のために必要にして一般の参考書等になく事項を、重点的に取り上げてある。内容は、高校生の集団学習に支障のないように平易にかみ砕いたつもりである。

尚、歳差章動の一般的な概要については本稿の末尾に紹介している文献を参照願いたい[1～6]。

2. 歳差運動の基本原理解

歳差運動の基本原理解については、コマの運動を例とするのがわかりやすい。コマを高速で回転させて水平面上に少し傾けて置くと、回転軸は一定の角速度で鉛直軸と一定の角度を保ちながら旋回する。この運動を歳差運動という[6]。

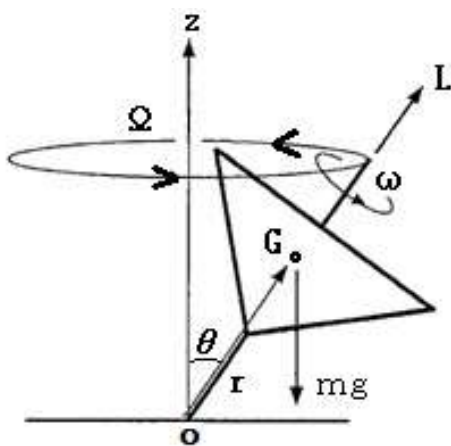


図 2.1 コマの歳差運動

今、図 2.1 のように、コマの回転軸が水平面

に接する点を座標原点 o とし、鉛直線の上向きに z 軸をとる。 r はコマの支点 o からコマの重心 G までの位置ベクトルである。そこで質量 m のコマが、その回転軸を z 軸 (鉛直軸) と傾斜角 θ を保ちながら歳差運動しているとする。 L はコマの角運動量ベクトル、 ω はコマの回転の角速度、 Ω は歳差運動の角速度である。

歳差運動 Ω の向きは、右ネジの法則により r 軸 (コマの回転軸) と z 軸 (重力の方向) がなす平面に直交し、図 2.1 に示すように紙面の表から裏となる。トルクの大きさ N は、地球の重力加速度を g として

$$N = mgr \sin\theta = r \times mg = r \times F \quad (2.1)$$

である。 $N = r \times F$ は一般に力 F のモーメントと呼ばれているもので、 $dL/dt = N$ (2.2) は回転運動の基本式である。

次に、基本式 $dL/dt = N$ から歳差運動の角速度 Ω を求めて見よう。図 2.2 は図 2.1 の運動を角運動量ベクトル L で表現したものである。図に示すように角運動量ベクトル L は z 軸のまわりを半径 $L \sin\theta$ で円運動することがわかる。歳差運動の角速度を Ω とすると、微小時間 dt のあいだの角運動量 L の変化は

$$dL = L \sin\theta \Omega dt \quad (2.3)$$

である。

また $dL/dt = N$ から $dL = N dt$ である。これらから、 $\Omega = N / L \sin\theta = N / I \omega \sin\theta$ (2.4) が導かれる。ここで I は、コマの軸の慣性モーメントである。

角運動量 L と傾斜角 θ を定数と見れば、歳差の角速度 Ω はトルク N に比例することにな

る。そこで以後、歳差運動はトルクを主に検討することとする。

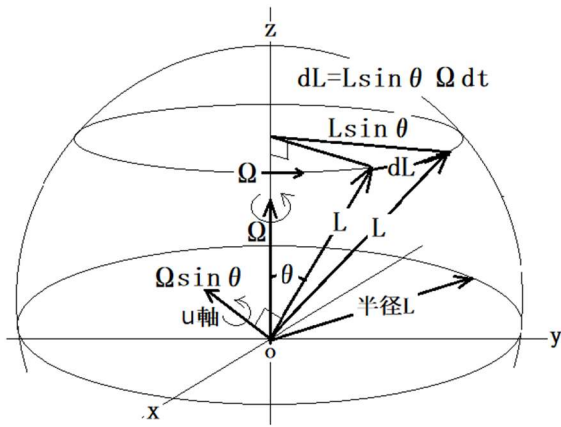


図 2.2 半径 L の球面における角運動量ベクトル L の移動

次に、上記の検討内容を地球に適用させる。図 2.3 は黄道面の天体が地球に及ぼすトルクの説明図である。ここでは天体を太陽または月と考えよう。

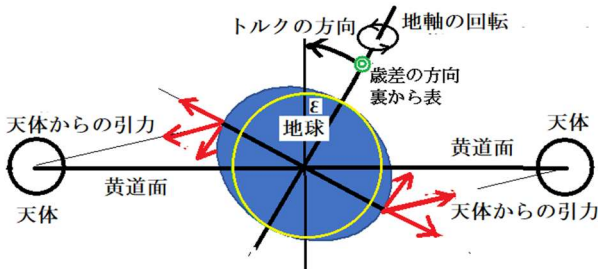


図 2.3 黄道面の天体が地球に及ぼすトルクの説明図

地球の場合、支点のかわりになるのは重心で、コマの傾き θ は黄道傾斜角 ε に相当する。地球は完全な球でなく、球を上下に少し圧縮したような形をしている。図 2.3 はそれを誇張して横(黄道面)方向から眺めたものである。地球内部の円は完全な球体を示している。地軸の方向から眺めると、上記の完全な球体の径よりもやや大きな完全な円である。

地球を質点の集合を見た場合、各質点には天

体からの引力によるトルクが発生するが、真球の部分は完全な対称性があるために相殺されて 0 となる。従って、実質的なトルクは球体からはみ出した部分から生まれることになる。図 2.3 からわかるように、天体からの引力は地球の重心に作用する中心力とそれに直角なトルク成分に分解される。トルクの方法は天体が軌道上のどの位置にあっても左回転であり、地球の地軸を立てるように作用することがわかる。これはコマの重力によるトルクと反対方向であり、歳差運動の方向が反対となることがわかる(図 2.3 の紙面の裏から表の方向)。つまり、地球の歳差運動の方向は地球の自転方向の逆となる。

3. トルクの計算式の導出

計算式の導出については参考文献 1,2 を読めばいいのであるが、重力ポテンシャル、ルジャンドル多項式、マッカラーの公式等の数式が続く、一般の天文ファンには難解である。そこで本稿は、天文と古典力学の基礎知識だけで上記と同じ結論が得られるように丁寧に解説する。

図 2.4 において地球の重心は直交座標 x, y, z 軸の原点 o に置かれている。 xy 平面は地球の赤道面であり、 z 軸は地軸にあたる。 r は地球の重心 o から質点までの距離、 s は質点から天体の中心までの距離、 R は地球の重心 o から天体の重心までの距離を表す。

座標系は一般的には右手系が使われるが、地球物理学では左手系が使われる場合があるので確認すること。時により、式の符号が変わることがある。

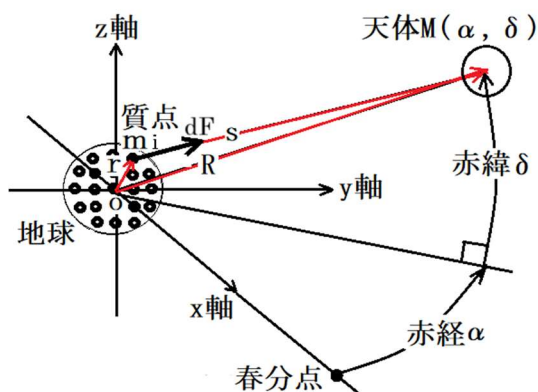


図 2.4 地球の質点と天体の位置関係
(右手系座標)

上図において、 x 軸、 y 軸の平面は地球の赤道面で、それに垂直な z 軸は地球の自転軸を表している。 x 軸は赤道と黄道の交点である春分点の方向を正とする。(図 2.3 参照)

ここで、天体 M が地球にもたらすトルクを計算しよう。地球は質点の集合と見なされ、天体 M が各質点に及ぼす引力 dF は万有引力の法則から下式で表される。式中の R, r, s は位置ベクトルで表示されている。

$$dF = \frac{GMm_i}{|s|^2} \frac{s}{|s|} = \frac{GMm_i}{|s|^3} s \quad (2.5)$$

G は重力定数、 M は天体の質量、 m_i は質点の質量、 s は質点から天体までの距離である。各質点に働く力 dF は、地球を動かすトルク $dN = r \times dF$ を形成する。 r は地球の重心から質点までの距離である。図 2.4 より $R = r + s$ のベクトル関係が成立するから、質点の座標を (x, y, z) とする時の距離 s は下式で表される。

$$s = R - r = \begin{pmatrix} R \cos \delta \cos \alpha \\ R \cos \delta \sin \alpha \\ R \sin \delta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} R \cos \delta \cos \alpha - x \\ R \cos \delta \sin \alpha - y \\ R \sin \delta - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix}$$

$$|s| = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} = \sqrt{D}$$

$$D = x^2 + y^2 + z^2 - 2R(\cos \delta \cos \alpha x + \cos \delta \sin \alpha y + \sin \delta z) + R^2$$

r は R に比べて極めて小さいから $\frac{1}{|s|^3}$ の

マクローリン展開が可能である。

$|s| = \sqrt{D}$ と置いて関数

$$f(x, y, z) = \frac{1}{|s|^3} = \frac{1}{(\sqrt{D})^3} = D^{-1.5} \text{ を作成する。}$$

これを x, y, z で偏微分して、1 階微分のマクローリン展開を行う。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial D^{-1.5}}{\partial x} = -3D^{-2.5}(x - R \cos \delta \cos \alpha)$$

$$\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial x} = \frac{3}{R^4} \cos \delta \cos \alpha$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial D^{-1.5}}{\partial y} = -3D^{-2.5}(y - R \cos \delta \sin \alpha)$$

$$\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial y} = \frac{3}{R^4} \cos \delta \sin \alpha$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial D^{-1.5}}{\partial z} = -3D^{-2.5}(z - R \sin \delta)$$

$$\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial z} = \frac{3}{R^4} \sin \delta$$

$$f(x, y, z) =$$

$$f(0,0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)y + \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)z$$

$$= \frac{1}{R^3} + \frac{3}{R^4}(\cos \delta \cos \alpha x + \cos \delta \sin \alpha y + \sin \delta z)$$

最終的に

$$\frac{1}{|s|^3} = \frac{1}{R^3} + \frac{3}{R^4}(\cos \delta \cos \alpha x + \cos \delta \sin \alpha y + \sin \delta z)$$

となる。

$$dN = r \times dF$$

$$dN = r \times \frac{GM}{|s|^3} s = GMm_i \left\{ \frac{1}{R^3} + \frac{3}{R^4}(\cos \delta \cos \alpha x + \right.$$

$$\left. \cos \delta \sin \alpha y + \sin \delta z) \right\} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R \cos \delta \cos \alpha - x \\ R \cos \delta \sin \alpha - y \\ R \sin \delta - z \end{pmatrix}$$

$$=GMm_i \left\{ \frac{1}{R^3} + \frac{3}{R^4} (\cos\delta\cos\alpha x + \cos\delta\sin\alpha y + \right.$$

$$\left. \sin\delta z) \right\} R \begin{pmatrix} \sin\delta y - \cos\delta\sin\alpha z \\ \cos\delta\cos\alpha z - \sin\delta x \\ \cos\delta\sin\alpha x - \cos\delta\cos\alpha y \end{pmatrix}$$

dN の積分

$$N = GM \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \frac{1}{R^2} + \frac{3}{R^3} (\cos\delta\cos\alpha x + \cos\delta\sin\alpha y + \sin\delta z) \right\} \begin{pmatrix} \sin\delta y - \cos\delta\sin\alpha z \\ \cos\delta\cos\alpha z - \sin\delta x \\ \cos\delta\sin\alpha x - \cos\delta\cos\alpha y \end{pmatrix}$$

地球楕円体の対称性から重積分における奇関数の積分は0となるから

$$N = \frac{3GM}{R^3} \sum_{i=0}^n m_i \begin{pmatrix} \cos\delta\sin\alpha\sin\delta(y^2 - z^2) \\ \cos\delta\cos\alpha\sin\delta(z^2 - x^2) \\ \cos^2\delta\sin\alpha\cos\alpha(x^2 - y^2) \end{pmatrix}$$

$$N_x = \frac{3GM}{R^3} \sum_{i=0}^n m_i \cos\delta\sin\alpha\sin\delta(y^2 - z^2)$$

$$= \frac{3GM}{2R^3} \sin 2\delta\sin\alpha \sum_{i=0}^n m_i (y^2 - z^2)$$

上式の $\sum_{i=0}^n m_i (y^2 - z^2)$ の部分は、

$$\sum_{i=0}^n m_i ((x^2 + y^2) - (x^2 + z^2))$$
と書き換えることができる。

ここで地球のx軸、y軸を回転軸とする慣性モーメントを $I_x = I_y = A$ 、z軸を回転軸とする慣性モーメントを $I_z = C$ とすると

$$N_x = \frac{3GM}{2R^3} \sin 2\delta\sin\alpha (C - A)$$
となる。同様に N_y, N_z は

$$N_y = \frac{3GM}{R^3} \sum_{i=0}^n m_i \cos\delta\cos\alpha\sin\delta(z^2 - x^2)$$

$$= \frac{3GM}{2R^3} \sin 2\delta\cos\alpha \sum_{i=0}^n m_i (z^2 - x^2)$$

上式の $\sum_{i=0}^n m_i (z^2 - x^2)$ の部分は、

$$\sum_{i=0}^n m_i ((z^2 + y^2) - (x^2 + y^2))$$
と書き換えることができる。即ち $(A \cdot C)$ となる。従って上

$$式は N_y = -\frac{3GM}{2R^3} \sin 2\delta\cos\alpha (C - A)$$

となる。続いて N_z は

$$N_z = \frac{3GM}{R^3} \sum_{i=0}^n m_i \cos^2\delta\sin\alpha\cos\alpha(x^2 - y^2)$$

$$= \frac{3GM}{2R^3} \cos^2\delta\sin 2\alpha \sum_{i=0}^n m_i (x^2 - y^2)$$

上式の $\sum_{i=0}^n m_i (x^2 - y^2)$ の部分は、

$$\sum_{i=0}^n m_i ((x^2 + z^2) - (y^2 + z^2))$$
と書き換えることができる。従って上式は $N_z =$

$$\frac{3GM}{2R^3} \cos^2\delta\sin 2\alpha (A - A) = 0$$
となる。まとめる

と、下式となる。

$$N = \frac{3GM}{2R^3} (C - A) \sin 2\delta \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$上式から \frac{N_x}{N_y} = -\tan\alpha \quad (2.8)$$
 の関係がある

ことがわかる。

次に歳差運動 Ω の角速度は、前述のコマの(2.4)式からトルク N_x の平均値を $L\sin\epsilon$ で除することにより求められるここで ϵ は地球の黄道傾斜角、 L は地球の極軸まわり角運動量 $L = C\omega$ で、 C は地球の極軸まわりの慣性モーメント、 ω は地球の自転の角速度である。

4. フーリエ解析

歳差章動トルクは周期的な変化である。そのため、歳差章動の数学的な手法としてはフーリエ解析が主役となる。フーリエ解析の詳細については文献[7]が分かりやすくお勧めである。

周期関数はフーリエ解析により下記の数式に展開できる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) \quad (2.8)$$

上記は実三角関数の級数であるが、これをオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を使って複素数に置き換えることができる。

即ち $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ より

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{2\pi i n t}{T}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} \quad (2.9)$$

エクセルの分析ツールの中には、フーリエ解析（高速フーリエ変換 FFT）が搭載されている。高速フーリエ変換の原理は、(2.9)式の複素数型のフーリエ変換であり、出力は複素数となる。高速フーリエ変換 FFT のアルゴリズムは難解であるが使い方は簡単である。具体的な使用方法については本文の中で丁寧に説明する。ここではフーリエ解析の理論の理解は必ずしも必要でない。ワープロを使うのにワープロのアルゴリズムの理解は不要であろう。要するに、周期的な現象が単純な三角関数の和として表されることを確認できればそれでことは済む。ここではエクセルの使い方が重要である。

その下準備としての線形補間法について説明する。線形補間法は、データを折れ線グラフで表示しデータとデータの間の任意の値をとりだすものである。これはエクセルを使用するための必須の下準備である。

4.1 線形補間法 データ処理の下準備

エクセルの高速フーリエ変換は、下準備としてデータの個数を 2 のべき乗個

(2,4,8,16・・・)にする必要がある。なぜそうするのかについては、ひとまず保留してほしい。なれないうちは、下記の説明の通りにしてほしい。そのために、エクセルによる折れ線近似の補間法を用いる[参考サイト 1]。以下に、事例として 5 個のデータから $2^3=8$ 個のデータを取り出す方法を説明する。

表 2.1 エクセルによる折れ線近似の補間法

時間	トルク	データ 8 個	計算ステップ					答
A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	3	1	0.000	3.00	-1.20	0.70	0.000	3.000
0.7	1.8	2	0.571	3.00	-1.20	0.70	0.571	2.020
2.5	5	3	1.143	1.80	3.20	1.80	0.443	2.587
3.7	2.2	4	1.714	1.80	3.20	1.80	1.014	3.603
4	5	5	2.286	1.80	3.20	1.80	1.586	4.619
		6	2.857	5.00	-2.80	1.20	0.357	4.167
		7	3.429	5.00	-2.80	1.20	0.929	2.833
		8	4.000	5.00	#REF!	#REF!	0.000	5.000

表 2.1 の説明

A 列と B 列は一枚の表（表 AB）で、どこにおいてもよい。

A 列：積算時間（必ず昇順のこと）

B 列：トルクの計算値（A の出力値）を示す。

C 列は $2^3=8$ のデータ No.

D 列は A 列 0~4 までの時間を均等に配分したものである。即ち A 列の最終の時間 4 を 7 等分したものである。計算式は 1 行目 D1=0 2 行目 D2=D1+4/7 とすれば良い。

E 列~H 列は計算ステップで、I 列が計算結果（答）である。

F 列 G 列のデータ No.8 の行の#REF!の表示が出ているが、I 列の答は IFERROR 関数によりエラー補正されているので無視してよい。（#REF!は必ず出る、出なければエラー）

データ No.1 と No.8 の D 列は A 列の最初の行 0 と最後の行 4 に対応している。E 列~I 列の計算式は以下の通りである。

式中の \$A\$11:\$B\$15 は表 AB を示すものである。計算はエクセル行番 11 からとする。

E 列

=VLOOKUP(D11,\$A\$11:\$B\$15,2,1)
 F 列
 =(INDEX(\$A\$11:\$B\$15,MATCH(D11,\$A\$11:\$A\$15,1)+1,2)-
 VLOOKUP(D11,\$A\$11:\$B\$15,2,1))
 F 列 2 行目の末尾の-符号を抜かさないこと。
 G 列
 =(INDEX(\$A\$11:\$B\$15,MATCH(D11,\$A\$11:\$A\$15,1)+1,1)-
 VLOOKUP(D11,\$A\$11:\$B\$15,1,1))
 H 列
 =D11-VLOOKUP(D11,\$A\$11:\$B\$15,1,1)
 I 列
 =IFERROR(VLOOKUP(D11,\$A\$11:\$B\$15,2,0), E11+F11/G11*H11)

図 2.5 に表 2.1 の計算結果を示す。これはフーリエ解析をやる前に必ず確認して欲しい。表 AB で作成した折れ線の上に 8 個の均等データが乗っていれば合格である。

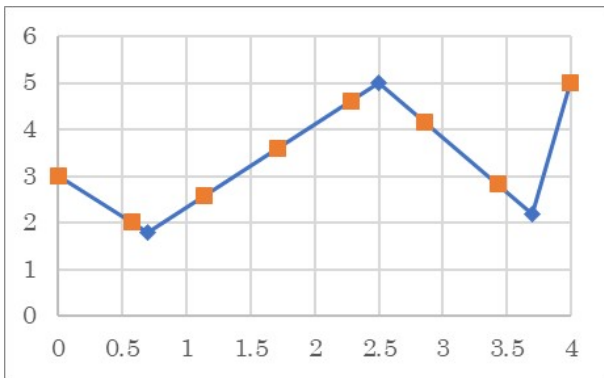


図 2.5 折れ線グラフに補間法で求めた値をプロットした結果
 小さなドットは 5 個の入力データ
 両端のドットは重なっている

この原理を少し説明しておこう。表 AB において、 x_1 と x_2 の中間値を x として、それに対応する値を y として求めると

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \text{ となる。 } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ は折れ線}$$

グラフの傾きである。これを I 列の式 E11+F11/G11*H11 に対応させると、E 列が y_1 、F 列が $(y_2 - y_1)$ 、G 列が $(x_2 - x_1)$ 、H 列が $(x - x_1)$ が対応していることがわかる。後は、エクセル関数の参考書を参照願いたい。

4.2 歳差章動トルクの計算結果をフーリエ解析する

エクセルのフーリエ解析にはデータ数を 2^n 乗個にする制約がある。ところが表 2.2 の歳差章動トルクのデータは 111 個である。そこで役立つのが先に述べた線形補間法である。ここでは月のトルク (昇交点 No.63) を前述の(2.6)式で計算した Nx の 111 個のデータから 128 個のデータを取り出そう。それにはまず、時間軸と 111 個の Nx のデータとの表を作成する必要がある。

表 2.2 元データの入力表

行番	A 積算時間	B トルク Nx
1	0.000	2.6332E+22
2	5.626	2.5130E+22
3	11.626	2.3744E+22
↓	↓	↓
↓	↓	↓
109	647.626	2.8648E+22
110	653.626	2.7459E+22
111	656.311	2.6944E+22

入力表は、エクセル表示にすると A\$1\$:B\$111\$ となる。これを前述の線形補間法に従って 128 個のデータを作成する。フーリエ解析用入力データを、エクセルで出力する方法はネットなどで検索すれば山のように

あるのでそれらを閲覧していただきたい [参考サイト 2]。

表 2.3 は、フーリエ解析を行った結果を示している。しかし、エクセルの出力をどうするかが問題であるので、そのところを表 2.3 に従って説明する。次数 n は振幅が $1 \times 10^{22} \text{Nm}$ 以上のものを取り上げた。

表 2.3 エクセルのフーリエ変換後の出力 N_x (基準周期 27.3217 日)

次数 n	Ans	エクセル出力値
0	2.633E+22	1.58366E+24
1	2.523E+22	1.1473E+023+1.4330E+023i
2	2.404E+22	7.7560E+023+1.9338E+023i
3	2.306E+22	5.2000E+022+1.6496E+023i
4	2.218E+22	-3.019E+022+3.6222E+022i
5	2.113E+22	-1.2977E+022+2.2012E+021i

n はフーリエ級数の次数 n である。これは 0 ~ 127 の連続番号で、各自で入力する。その全個数はエクセルの入力データ数 128 に一致する。

$n=0$ は変化しない定数で、直流成分と呼ばれる。これは $n \geq 1$ の周期関数とは異なる処理が必要である。

$n=1$ は月の公転周期 27.3217 日 (約 1 月) の基準となる周波数を表す。

$n=2$ ならば半月周期、 $n=3$ ならば 1/3 ヶ月周期となる。 n の逆数が周期となる。

Ans 列は表 2.1 の答列に対応するもので、表 2.2 の出力結果である。次の長たらしい数列がエクセルのフーリエ変換後の出力である。これは複素数で表示され、実際的小数点以下の桁数は 14 桁もある。

次表は表 2.3 の続きで n は共通である。

表 2.4 (表 2.3 の続き)

エクセルのフーリエ変換後の出力 N_x

次数 n	振幅	位相 rad	位相 deg
0	1.2372E+22	0	0
1	2.8684E+21	0.896	51.3
2	1.2490E+22	0.244	14.0
3	2.7026E+21	1.265	72.5
4	7.3685E+20	2.266	129.8
5	2.0567E+20	2.974	170.4
↓	↓	↓	↓

次数 n の次の列は表 2.3 の複素数の大きさを IMABS 関数で計算したものである。

その後の振幅の計算は、注意が必要である。 $n=0$ の直流分は絶対値をデータの個数 128 で割る。

$n \geq 1$ は、絶対値をデータの個数 128 で割ったものをさらに 2 倍する。

次の位相は表 2.3 の複素数の偏角を IMARGUMENT 関数で計算したもので、単位は rad である。次の位相はそれを DEGREES 関数で度に換算したものである。図 2.6 は振幅スペクトルと呼ばれているもので、表 2.4 の次数と振幅の関係を示している。

<スペクトル>

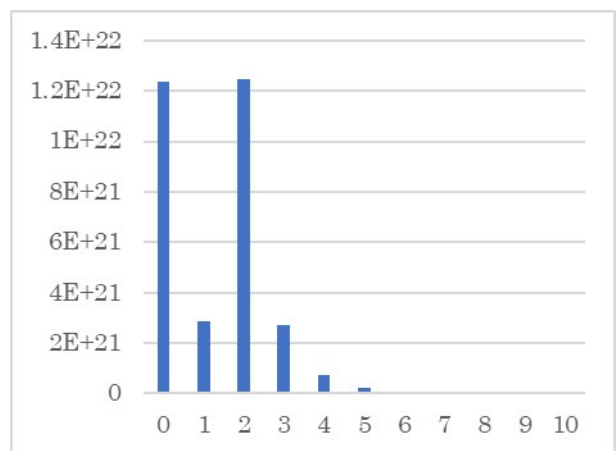


図 2.6 月の軌道 No. 63 N_x の周波数と振幅のスペクトル

<波形>

次に波形の出し方を説明する。

$n = 0$ の直流成分は、正負があるので注意しよう。それは表 2.3 の複素数(ここでは実数のみ)の正負に従う。

周期成分は、下式によってグラフ化する。

$$A_n \cos(2\pi n \frac{\text{deg}}{360} + \phi_n) \quad (2.10)$$

A_n は振幅、 ϕ_n は位相 rad で、添え字の n は次数である。式中 deg は、一周期 360° を基準としたグラフの横軸に使う角度である。月の場合、 $1\text{deg} = 27.3217/360 = 0.0759$ 日である。図 2.6 のスペクトルからわかるようにグラフ化の対称としては n が $0 \sim 4$ 程度で十分であることがわかる。結果を図 2.7 に示す。

直線が $n=0$ の直流成分で、平均値を示す。これを中軸として大きく振動しているのが合計波形である。図 2.7 において横軸の 360° は月の 1 回転(公転)を表している。縦軸の 0 線を中軸として大きく振動しているのが半月周期の波である。

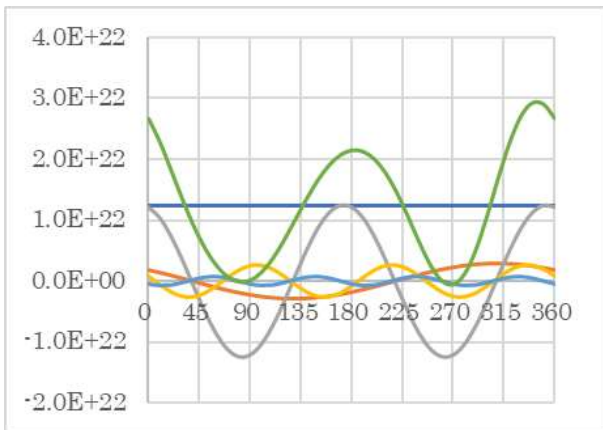


図 2.7 次数 $n=0 \sim 4$ のトルクの波形と合計波形 N_x

ここで、フーリエ解析が正しい結果を示しているかをチェックするために、トルクの入力波形と図 2.7 の合計波形を重ね合わせたものが図 2.8 である。

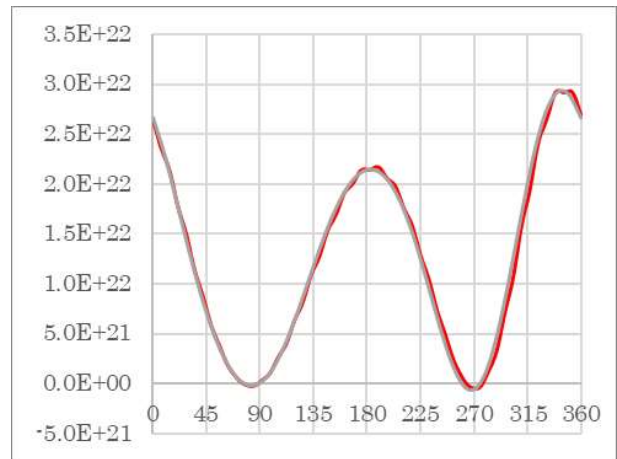


図 2.8 入力波形と合計波形の比較 N_x

滑らかに変化しているのがフーリエ解析による合計波形で、少しギザギザが重畳しているのが入力波形(実波形)である。 N の数を増やして行けばさらに入力波形に近づけることができるが、本稿では線一本程度の差ならば合格としよう。フーリエ解析の精度は入力データの数だけでなく、入力波形の形にも影響されるので、この確認作業は重要である。

以上の操作を N_y に対しても行う。紙面の都合上詳細は省略するが、半月周章動を表す $n=2$ の振幅は $1.3594E+22$ 位相は -76.0° となる。ここで、 N_x と N_y の数式を(2.11)式に従って $n = 2$ を具体的に表示すると次のようになる。

半月周章動 $n = 2$

$$N_x = 1.2490 \cos(4\pi \frac{\text{deg}}{360} + 14.0 \frac{\pi}{180}) \times 10^{22}$$

$$N_y = 1.3594 \cos(4\pi \frac{\text{deg}}{360} - 76.0 \frac{\pi}{180}) \times 10^{22}$$

図 2.9 は、上式の N_x, N_y を deg を横軸にしてグラフ化したものである。

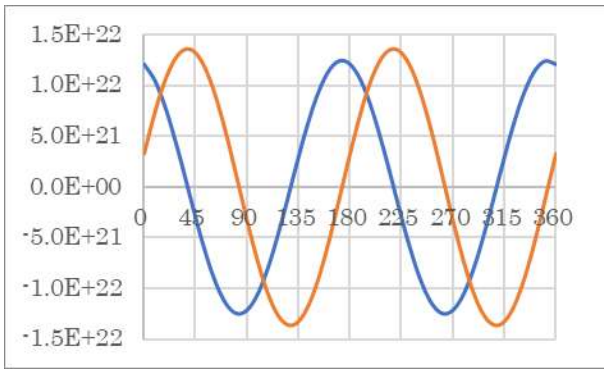


図 2.9 軌道 No. 63 $n = 2$ M_x, M_y のトルクの変化 波高値の低い方が M_x

次に、 M_x, M_y のトルク成分を x 軸、 y 軸に取りこみリサージュ図形を作成したものが図 2.10 である。

<リサージュ図形 $n=2$ >

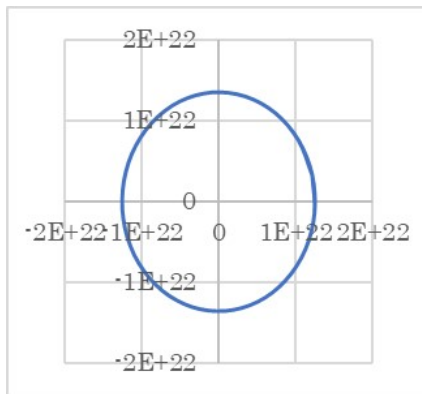


図 2.10 軌道 No. 63 M_x, M_y のリサージュ図形

M_x, M_y の位相差は $14.0 - (-76.0) = 90^\circ$ であるため、やや縦長の標準形楕円である。

5. リサージュ図形

フーリエ解析によるリサージュ図形は角速度（周波数）が同じものを組み合わせる。前述の説明では、 \cos 波と \cos 波の組み合わせであったが、ウーラーの章動表のように \sin 波と \cos 波の組み合わせでもそのまま適応できる。

フーリエ解析によるリサージュ図形の一般形は、図 2.11 に示すように位相差により傾いた楕円となる。

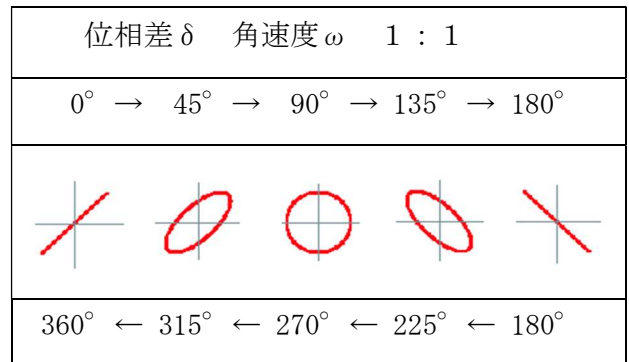


図 2.11 角速度 ω が 1 : 1 の時の位相差 δ によって変化するリサージュ図形

$\delta = 0^\circ$ と $\delta = 180^\circ$ の直線は楕円の短径が極限まで小さくなったものと見なされる。また $\delta = 90^\circ$ は x 軸と y 軸の振幅が等しい時には真円となる。位相差 δ は、 M_x, M_y の数式の $\text{deg}=0$ とした時の角度の初期値の差の絶対値を求め、図 2.11 と照合すればよい。 \sin 波と \cos 波の組み合わせの場合は、 \cos 波を $\cos \theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ の関係を利用して \sin 波に揃えてから、位相差 δ を求める。従って、単なる \sin 波と \cos 波の組み合わせにおいては、 δ は 90° となる。これは、 x 軸に対して傾きのない標準形と呼ばれる楕円となる（図 2.10 参照）。フーリエ解析においては、位相差 δ が 90° 以外の値をとることがあるので、傾いた楕円が登場する（図 2.12）。楕円というと、横長のものを想像しがちであるが、章動楕円はやや縦長のものが多い。ここで傾いた楕円の回転角とその長半径と短半径を求めて見よう。

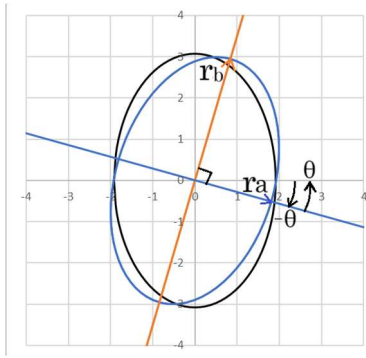


図 2.12 リサージュ図形の楕円体の回転角

$$\theta_x = 1 \quad \theta_y = 2 \quad \delta = 75^\circ \theta = -16^\circ$$

これらの導出は、一般には線形代数を用いるがここではより簡明な方法を紹介しよう。

$x = \theta_x \cos \omega t$ $y = \theta_y \cos(\omega t + \delta)$ で与えられる時、次式が成立する[参考サイト 3,4]

$$\left(\frac{x}{\theta_x}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{\theta_x}\right)\left(\frac{y}{\theta_y}\right)\cos\delta + \left(\frac{y}{\theta_y}\right)^2 = \sin^2\delta \quad (2.11)$$

(これは $x = \theta_x \cos \omega t$ $y = \theta_y \cos(\omega t + \delta)$ を上式に代入することにより確認できる導出方法は参考サイト[3]を参照のこと)。

(2.11) 式は標準形の楕円(2.12) 式を回転させたものである。(図 2.12 参照)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (2.12)$$

これを確認するために、実際に楕円の標準形を θ_0 から $-\theta$ 回転させてみよう。(図 2.12 参照) まず、下準備として移動前の点 (x,y) と移動後の点 (X,Y) の関係を求める。この関係は複素数平面や回転行列でも求められるが、以下のように三角関数の加法定理から求めるのが簡明である。原点からの距離を r 、初期角を θ_0 として、移動前の点を極座標的に

$(x,y) = (r \cos \theta_0, r \sin \theta_0)$ で表すと $-\theta$ 回転後の点は $(X,Y) = (r \cos(\theta_0 - \theta), r \sin(\theta_0 - \theta))$ で表されるから

$$X = r \cos(\theta_0 - \theta)$$

$$= r(\cos\theta_0 \cos \theta + \sin\theta_0 \sin \theta) \\ = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$Y = r \sin(\theta_0 - \theta)$$

$$= r(\sin\theta_0 \cos \theta - \cos\theta_0 \sin \theta)$$

$$= y \cos \theta - x \sin \theta$$

上記を x,y について解くと

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta \quad (2.13)$$

$$y = X \sin \theta + Y \cos \theta \quad (2.14)$$

これらは初期角 θ_0 とは無関係である。これを標準形の(2.12)式に代入すると

$$AX^2 + BXY + CY^2 = 1 \quad (2.15)$$

ここで注意すべきは、回転によって(2.15)式の右辺の定数1は変化しないことである。変化するのは左辺の $AX^2 + BXY + CY^2$ のみである。これは二次形式で表現された楕円である。 $-\theta$ 回転させることにより XY の項が現れた。ならば、 $AX^2 + BXY + CY^2$ を逆に θ 回転させれば BXY 項は消えると想定される。

今、上記の内容を逆転させて、改めて(2.15) 式を二次形式で表現すると

$$ax^2 + bxy + cy^2 \quad (2.16)$$

上式を適切に回転させると xy の項を消去して標準形に変形できる。これを標準化という。

$ax^2 + bxy + cy^2$ を原点を中心に θ 回転させて $AX^2 + BXY + CY^2$ になったとする。

移動前の点 (x,y) と移動後の点 (X,Y) の関係をは、(2.13)(2.14)に $-\theta$ を代入して回転の方向を反転させる。

$$x = X \cos \theta + Y \sin \theta \quad (2.17)$$

$$y = -X \sin \theta + Y \cos \theta \quad (2.18)$$

これらを(2.16)式に代入して整理すると

$$A = a \cos^2 \theta - b \sin \theta \cos \theta + c \sin^2 \theta$$

$$B = 2(a - c) \sin \theta \cos \theta + b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$= (a - c) \sin 2\theta + b \cos 2\theta$$

$$C = a \sin^2 \theta + b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta$$

ここで $B = 0$ となる条件は

$(a - c) \neq 0$ 時、 $\tan 2\theta = \frac{b}{c-a}$ となる。上式から得られる θ は (2.16) 式を回転させた角度である。従って、これを回転後の標準形楕円から見れば、図 2.12 の $-\theta$ となる。 $\theta = -\theta = \frac{b}{a-c}$ となり、正負が反転する。上記と(2.16)式、(2.11)式の対応関係から

$$\tan 2\theta = \frac{2\theta_x\theta_y}{\theta_x^2 - \theta_y^2} \cos\delta \quad (2.19) \text{ が求められる。}$$

一般の教科書はこの記載が多い。位相差 δ が 90° の時は、 $\theta = 0^\circ$ であり傾かない標準形楕円となる。また、 $(a - c) = 0$ の時は $B = 0$ となる条件からは、 $\theta = \pm 45^\circ$ となる。リサージュ図形は、 x 軸の±振幅 θ_x と y 軸の±振幅 θ_y の四角形に内接する楕円となる。

次に、楕円の長半径と短半径を求めて見よう。まず $y = x \tan\theta$ の関係を(2.11)式に代入して x^2 を求める。次に、

$$r^2 = x^2 + y^2 = x^2 + x^2 \tan^2\theta = x^2 / \cos^2\theta$$

よって楕円の半径 r は

$$r = \frac{\theta_x\theta_y}{\sqrt{\theta_x^2 \tan^2\theta + \theta_y^2 - 2\theta_x\theta_y \tan\theta \cos\delta}} \left| \frac{\sin\delta}{\cos\theta} \right| \quad (2.20)$$

θ は、(2.19)で求めた θ と $\theta + 90^\circ$ を代入して

$$r_a = r(\theta) \quad (2.21)$$

$$r_b = r(\theta + 90^\circ) \quad (2.22) \text{ を求める。最終的に}$$

標準化された楕円は

$$\frac{x^2}{r_a^2} + \frac{y^2}{r_b^2} = 1 \quad (2.23) \text{ となる。}$$

参考文献

[1] Frank D.Stacey,Paul M.Davis, 訳者代表本 多了(2013)『地球の物理学事典』,朝倉書店,pp92-96,450-451
 [2] 『天体の位置と運動(シリーズ現代の天文学第 13 巻)』 p210~225 福島登志夫 日本評論社 2017

[3]若生康二郎編(1979)『地球回転 現代の天文学講座 1』,恒星社厚生閣,pp136-137.
 [4] 長沢工(2001)『天体の位置計算(増補版)』, 地人書館,pp.58-61,49-66, 229-233.
 [5]長谷川一郎(2007)『天文計算入門(新装改訂版)』, 恒星社厚生閣,pp84 -93.
 [6] 江頭務,『天界』 2022 年 3, 4,8,9 月号 2023 年 7 月号「これならわかる地球の歳差運動」, 東亜天文学会
 [7] 涌井良幸, 涌井貞美(2014)『道具としてのフーリエ解析』,日本実業出版社

参考サイト URL

(※以下は全て 2024 年 12 月 28 日閲覧)

[1] Excel で線形補間計算する方法について徹底解説
<https://doboku-engineer.com/excel-senkeihokan/>
 [2] 【Excel】フーリエ解析(イメージングソリューション)
https://imagingsolution.net/office/excel/excel_fourier_analysis_fft/
 [3] 解説 1 リサージュ図形の式
https://www.ne.jp/asahi/tokyo/nkgw/www_2/gakusyu/rikigaku/Lissajous/Lissajous_kai_setu/Lissajous_kaisetu_1.html
 [4] 高校数学Ⅲ 二次曲線の回転移動、標準化
<https://examist.jp/mathematics/quadratic-curve/nijikyokusen-hyoujyunka/>



江頭 務