投稿 天文教育における探究型学習課題(1)
～天文ソフトとエクセルで体感する歳差章動のメカニズム～

東亜天文学会　江頭　務

1. はじめに
本稿は天文に興味を示す高校生向けの探究型学習課題のプロセスを説明したものである。学習課題として、「歳差章動のメカニズム」を取り上げた。その理由としては、歳差章動は位置天文学の重要な理論であるにもかかわらず高校物理としては難解であるために適切な参考書がないことにある。

本稿の学習方法は、ケプラーがティコ・ブラーエの精密な火星の観測記録から天体軌道の法則を発見したように、観測データ（ここでは天文ソフトのデータ）から出発して簡明な歳差章動の数式を導き出すことにある。課題に汗を流して取り組む中で歳差章動の様々な現象が実感として理解できる。

参考書では歳差についての解説はあるが、月による 18.6 年周章動に関してはほとんどない。その理由は月の軌道が複雑に変化することにある。本稿の主眼は月の歳差章動のメカニズムを、市販の天文ソフトとエクセルを使って高校レベルの知識で読み解くことにある。なお、学習(2)以降で登場する文献と web サイトを文末にまとめておいたので参照いただきたい。

2. 特徴
①諸本の歳差章動の解説においては重力ポテンシャルやラグラジアンなどの解析力学の手法が用いられているが、これは高校物理のレベルを超えている。本稿はこれを古典力学にて翻訳し、高校物理の範疇で対応できるようにした。

②諸本の解説においては話を簡単にするため、月の軌道傾斜角と昇交点の移動を省略しているが、これでは歳差はともかく最大の突出した章動である 18.6 年周章動の十分な理解を得られない。本稿は、誰にでも簡単に作成できる数学的な円軌道モデルをエクセル上で作成しこれに対応した。

③体で学ぶ天文学として、トルク計算の入力データの取得に天文ソフトを利用した。生徒はこれを活用し天体観測をやっているかのような臨場感を味わうことができる。

④最後に、歳差と主要章動の簡明な数式化により歳差章動に関与するファクターが一目で理解できるようにした。

3. 学習のターゲットとゴール
歳差と章動は別物のように扱われることが多いが、これは地球に作用するトルクを成分で分解したものである。従って、歳差の式は章動を検討するなかで自然に導かれるし、その逆も成立する。

3.1 学習のターゲット　四つの主要章動
章動のほとんどは月と太陽の引力の周期変動によって引き起こされる数多くの周期成分の集まりである。これは章動楕円と呼ばれ 1980 IAU Theory of Nutation によれば、1 万分の 1 秒角を越える振幅をもつ成分だけをひろってもその数は 106 個に達する。本稿は、少しまえのものではあるが E.W.Woolard(ウーラード)の章動表を学習の参考資料とする[1]。

ウーラードの章動表は剛体地球、瞬間自転軸を対象としたため、IAU の最新版では弾性体地球、形状軸を対象としたものに改善されている[1,2,3]。しかしながら、本稿の計算は剛体地球、自転軸を対象とした計算なので、敢えてウーラードの章動表を採用した。歳差章動メカニズムの理解する上では、数値的にも影響はほとんどない。章動楕円は無数にあるが、黄経Δφと黄道傾斜角Δεの両者の大きさが共に 0.03″を越えるものを抜き出すとわずか四つに絞られる[1]。章動楕円の大きさは表 1.1A に示されるように$\theta_x \times \theta_y$ で表される。θ_x はΔφに sin εを乗じたものとなる。εは地球の黄道傾斜角で、観測期間の中間である 2034 年 6 月頃の値 23.4348°を採用した。(表 1.2 参照)

表 1.1A　ウーラードの章動表の抜粋
振幅 0.03″以上

項	Δφ sin の振幅	章動楕円 $\theta_x = \Delta\phi\ \sin\varepsilon$ sin の振幅	章動楕円 $\theta_y = \Delta\varepsilon$ cos の振幅
1	17.2327″	6.8535″	9.2100″
2	1.2729″	0.5062″	0.5522″
3	0.2088″	0.0830″	0.0904″
24	0.2037″	0.0810″	0.0884″

表 1.1B　章動の周期と月と太陽の関係

項	周期	月と太陽の関係
1	6798 日	月 18.6 年周章動
2	183 日	太陽　半年周章動
3	3399 日	月　9.3 年周章動
24	13.7 日	月　半月周章動

・章動楕円の大きさ

図 1.1 は四つの章動楕円の大きさをほぼ比例で示したものである。

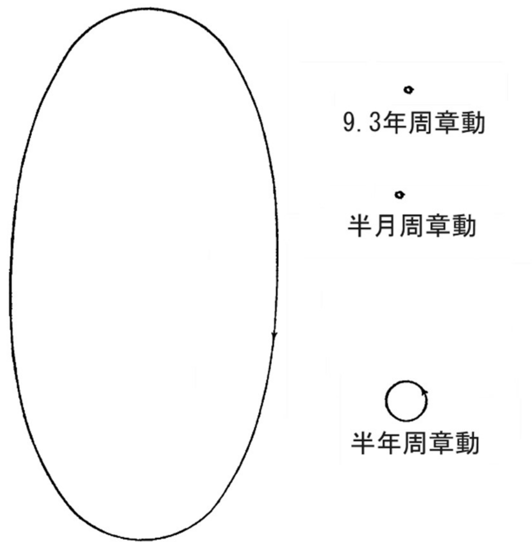

図 1.1　学習ターゲットとなる
四つの章動楕円

月の 18.6 年周章動　振幅 6.85″×9.21″
月の 9.3 年周章動　振幅 0.08″×0.09″
月の半月周章動　振幅 0.08″×0.09″
太陽の半年周章動　振幅 0.51″×0.55″

以上の説明から推測できるように表 1.1 の四つの章動を明らかにするならば、すべての章動の 99%程度を制したことになる。これは、一般の人の歳差章動の理解とすれば十分であろう。

3.2 学習のゴール　歳差章動の数式の導出

ゴールは、歳差章動の誰にでも理解できる簡易的な数式の導出である。これにより、歳差章動のメカニズムが数式の形で理解できることになる。下記に、本稿の学習の成果として得られる歳差章動の数式を示す。数式の精度は公表値の約 1%以下である(表 1.3 参照)。

表 1.2　歳差章動の計算に使用する太陽と月に関する定数表[4,5]

G 重力定数	6.6743×10^{-11} m^3/kgs^2
C 地球の慣性モーメント（極軸まわり）	8.0359×10^{37} kgm^2
A 地球の慣性モーメント（赤道軸まわり）	8.0096×10^{37} kgm^2
ω 地球の自転角速度	7.2921×10^{-5} rad/s
L 地球の角運動量	L=ωC=5.8599×10^{33} kgm^2/s
H 力学的扁平率	H=(C-A)/A=0.003273（1/305.55）
ε 地球の黄道傾斜角	23.4348°
i 月の平均軌道傾斜角	5.1567°
Ms 太陽の質量	1.9884×10^{30} kg
Rs 太陽と地球の距離	1.4960×10^{11} m
M_m 月の質量	7.3459×10^{22} kg
R_m 月と地球の距離	3.8440×10^{8} m

K=3GM(C-A)/4R^3

月　K_m=1.7026×10^{22}

太陽　K_s =7.8190×10^{21}

rad→″の換算式　rad$\times\frac{180}{\pi}\times$3600=　″

時間の単位は 1 日 (day) を単位とする通日。月の場合、月の昇交点が春分点近傍にある日を day=0 日とする。これは 6793.5 日で一巡する。太陽の場合、春分の日を day=0 日とし、365.2422 日で一巡する。

＜歳差＞

・月の歳差

$$\theta_d=\frac{K_m}{\mathrm{L}\sin\varepsilon}\{\sin2\varepsilon\cos2\mathrm{i}+0.002948\}\times 86400\times\mathrm{day}\qquad \mathrm{rad}\ (1.1)$$

・太陽の歳差

$$\theta_d=\frac{2K_s\cos\varepsilon}{\mathrm{L}}\times86400\times\mathrm{day}\qquad \mathrm{rad}\ (1.2)$$

＜章動楕円＞

・月の 18.6 年周章動

$$\theta_x=\frac{K_m}{L}\cos2\varepsilon\ \sin2i\times\frac{6793.5\times86400\mathrm{s}}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{6793.5}day\right)\qquad \mathrm{rad}\ (1.3)$$

$$\theta_y=0.16426\times\frac{K_m}{L}\times\frac{6793.5\times86400\mathrm{s}}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{6793.5}day\right)\qquad \mathrm{rad}\ (1.4)$$

・月の 9.3 年周章動

$$\theta_x=-0.001474\times\frac{K_m}{L}\times\frac{6793.5\times86400\mathrm{s}}{2\pi}\times\sin2\left(\frac{2\pi}{6793.5}day\right)\qquad \mathrm{rad}\ (1.5)$$

$$\theta_y=-0.001607\times\frac{K_m}{L}\times\frac{6793.5\times86400\mathrm{s}}{2\pi}\times\cos2\left(\frac{2\pi}{6793.5}day\right)\qquad \mathrm{rad}\ (1.6)$$

・月の半月周章動の大きさ　$\theta_x\times\theta_y$

月の公転周期 27.3217 日における軌道は閉じたものではないが、近似的に閉じたものとして扱う。

$$\theta_x=-\frac{K_m}{2L}\left\{\sin2\varepsilon\cos2\mathrm{i}+\cos2\varepsilon\sin2\mathrm{i}\cos\left(\frac{2\pi}{6793.5}day\right)\right\}\times\frac{27.3217\times86400\mathrm{s}}{2\pi}\sin2\left(\frac{2\pi}{27.3217}day\right)\qquad \mathrm{rad}(1.7)$$

$$\theta_y=\frac{K_m}{L}\left\{\sin\varepsilon\cos i+\cos\varepsilon\sin i\cos\left(\frac{2\pi}{6793.5}\mathrm{day}\right)\right\}\times\frac{27.3217\times86400\mathrm{s}}{2\pi}\cos2\left(\frac{2\pi}{27.3217}day\right)\qquad \mathrm{rad}\ (1.8)$$

・太陽の半年周章動

$$\theta_x=-\frac{K_s}{2L}\sin2\varepsilon\times\frac{365.2422\times86400\mathrm{s}}{2\pi}\sin2\left(\frac{2\pi}{365.2422}day\right)\qquad \mathrm{rad}\ (1.9)$$

$$\theta_y = \frac{K_s}{L} sin\varepsilon \ \times \ \cos 2(\frac{2\pi}{365.2422} day) \quad \text{rad} \ (1.10)$$

太陽の歳差を求める(1.2)式は
Ks =3GMₛ(C-A)/4R³と L=ωC を代入すると、次のように書ける[4]。

$$\theta_d = \frac{3GM_s \cos\varepsilon}{2\omega R^3}(\frac{C-A}{C}) \times 86400 \times day \quad rad$$

上式において (C-A)/C は力学的扁平率 H と呼ばれているが、単なる C と A の割り算というわけにはいかないようである。同文献には、歳差の速度から得られた量として、1/305.456 の記載がある。また、これに関して文献[2]には次の記述がある。
『歳差トルクの強さを規定する要因のうちで、月と太陽の質量、距離、黄道傾斜角など力学的扁平率以外の量については、それぞれ独立な観測によってかなり正確な数値が得られている。そこで日月歳差の観測から、力学的扁平率の値を求めることができる。このようにして、現在 1/305.51 という値が得られている』
　要するに、力学的扁平率 H は歳差章動理論から間接的に得られる値であり、歳差章動理論が変われば H も変わるということである。このため、本稿では文献[4]の算式どおりの H＝0.003273（1/305.55）を採用している。

前ページの一連の式を使って計算した結果を公表値と比較する。

日月歳差の比較

　平均歳差（計算値）月 34.2839″/年＋太陽 15.9367″/年=50.2207 ″/年
公表値 50.3851″/年　[5]
偏差の比率 0.33%
={ (公表値－平均歳差) / 平均歳差 }×100%

章動の比較

　上記の数式を使った計算結果とウーラードの章動表（表 1.4 参照）とは全く同じものではないが、参考値としては扱える。

表 1.3　平均章動（計算値）と ウーラードの章動表の比較

月　18.6 年周章動			
	平均章動	ウーラード	偏差比率
θx	6.8522″	6.8535″	0.02%
θy	9.1963″	9.2100″	0.15%
月　9.3 年周章動			
	平均章動	ウーラード	偏差比率
θx	0.0825″	0.0830″	0.61%
θy	0.0900″	0.0904″	0.48%
月　半月周章動			
	平均章動	ウーラード	偏差比率
θx	0.0808″	0.0810″	0.25%
θy	0.0892″	0.0884″	-0.89%
太陽　半年周章動			
	平均章動	ウーラード	偏差比率
θx	0.5044″	0.5062″	0.36%
θy	0.5498″	0.5522″	0.45%

月の半月の平均章動は昇交点の
黄径 90°（day=1698 日に相当）を採用

4.学習の進め方

　本課題は高校物理の範囲内で理解できるように構成しているが、教師のアドバイスが望ましい。教師が本稿の内容の一部をマスキングして生徒への設問としても学習効果が得られる。本稿は、グループ学習を想定しており、課題の解決に要する期間は約 1 月である。

・学習形態

20 人程度の天文に興味をもつ高校生のグループ学習　学習期間　約 1 か月
準備する学習機材　天文ソフト（ここではステラナビゲータ）とエクセル

・学習の進め方

学習の進め方の基本はポップ、ステップ、ジャンプの三段階である。まず初めに天文ソフトソフトから太陽や月の位置情報を取得する。次に、それを元にトルク計算を行い、結果をグラフにまとめる。最後に、円軌道モデルを使って、歳差章動の数式化を実現する。

・本稿の全体構成

本稿はかなりの分量があるため、これを下記のように 6 分割した。
略称は「学習(1)」から「学習(6)」とする。

「学習(1)」学習計画編

主として教師を対象とした学習計画の概要

「学習(2)」基礎学習編　予備知識の習得

コマを使った歳差章動の基本原理、歳差章動トルクの計算式の導出、エクセルによるフーリエ解析の方法、リサジュー図形等

「学習(3)」太陽のデータ解析編

天文ソフトから入手した観測データからエクセルにて歳差章動トルクを計算し、フーリエ解析を行う。

「学習(4)」太陽の歳差章動編

「学習(3)」で得られたデータを様々な面から検討する。章動のリサジュー図形である章動パタ―ンと平均章動の作成方法について学ぶ。さらに、円軌道モデルによる太陽の歳差章動の計算式を導く。まとめとして、地球ゴマによる章動の実験を行う。ここは、月の歳差章動を検討するための基礎部分である。

「学習(5)」月のデータ解析編

・月の昇交点移動に対応した、天文ソフトからのデータ抽出と歳差トルクの計算
膨大な月の天文データを月の軌道に従い時系列的に整理し、月の昇交点カレンダーによる軌道のナンバリングを行う。データの整理方法は一見地味であるが課題の解決にとって重要であるため、整理方法を生徒に討論させることも学習効果がある。
・月の 18.6 年周章動と半月周章動における歳差章動トルクの計算とグラフ化
計算量が多いのでグループ学習の場合は、計算を分担させる。
分担方法については後述の教育資料 1 参照。
・月の近地点周期を考慮した 186 年周章動

「学習(6)」月の歳差章動編

・仮説を立て、数学的モデルとして円軌道モデルを作成
・実トルク（天文ソフト）と円軌道計算モデルの比較と検討
・フーリエ解析の手法による近似式の導出

5. 教師用の教育資料

教育資料1　昇交点カレンダーの作成法の補遺

この記述は「学習 5」の本文の続きで補足である。

月の軌道のトルク計算は、250 本すべて行うのが理想的であるが作業が大変である。
そこで抜き取り計算を行うわけであるが、生徒の数に対応して作業量を分担させるために自在に抜き取る方法を解説する。

まず、黄経 0°近傍からの経過時間に対応して 250 本すべての軌道にナンバリングを行う。
「学習 5」の本文では計算の起点を、月の軌道 No.0　2025 年 2 月 2 日 15 時 44 分 07 秒（JST）としているが、これは任意に選定できる。

月の軌道のナンバリング

交点月は $27.21222+4.0\times10^{-7}$ T 日であるが、±200 年程度であれば T のユリウス世紀の影響は無視できる。しかし、これは平均なので天文ソフトで確認すると昇交点は経験上±24 時間の間で見つかる。

従って、昇交点番号を n とする時、昇交点が出現する日時のユリウス日は
$2460708.78064+27.21222\times n$ ± 1 日の間と

なる。

グループが複数ある時は、同じ計算をやるよりも異なった 18.6 年周期を対象とすることを推奨する。なぜなら、異なった 18.6 年周期を計算することにより計算結果のばらつきが得られるからである。

月の昇交点は、18.6 年で一巡するとはいえ厳密には昇交点は元の位置に戻るわけではない。図 1.2 は、昇交点 No.0 と 18.6 年後の No.250 の章動パターンを比較したものである。

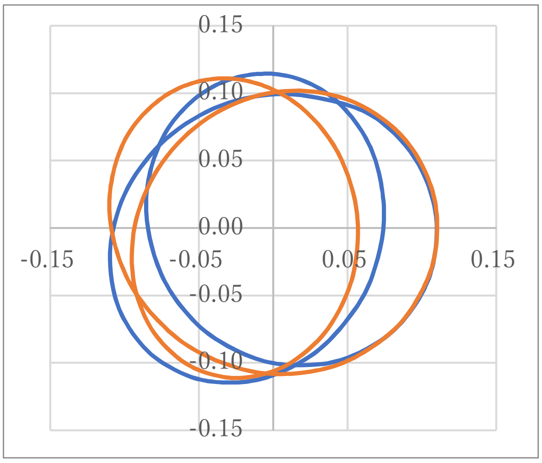

図 1.2　昇交点 No. 0 と No. 250 の章動パターン　単位　″

No.250 は、左上方に張り出した曲線で、トルクの平均値はほとんど同じであるが、章動パターンが異なるのは月の軌道の中身が異なっていることを意味している。つまり、昇交点の位置が同じであったとしても、太陽との位置関係により月の軌道が歪曲されるからである。これらは、月の出差、二均差と呼ばれる(HP2)。章動パターンを分類、整理することにより月の軌道の変化を求めるのも興味ある課題であろう。さらに章動パターンは、月の近地点移動の周期約 8.85 年の影響を受けているので、より合同性の高い周期として 186 年周期が挙げられる。

教育資料2　ウーラードの章動表

表 1.4 はウーラードの章動表を簡略化して示したものである。詳細については文献[1]を参照していただきたい。

表 1.4　ウーラードの章動表（簡略版）

	項番	⊿φ ″ sin の係数	⊿ε ″ cos の係数	周期 日
長周期項	1	-17.2327	9.2100	6798
	2	-1.2729	0.5522	183
	3	0.2088	-0.0904	3399
	4	0.1261	—	365
	5	-0.0497	0.0216	122
	6	0.0214	-0.0093	365
	7	0.0124	-0.0066	178
	↓	↓	↓	↓
	23	-0.0002	—	3233
短周期項	24	-0.2037	0.0884	13.7
	25	0.0675	—	27.6
	26	-0.0342	0.0183	13.6
	27	-0.0261	0.0113	9.1
	28	-0.0149	—	31.8
	29	0.0114	-0.0050	27.1
	↓	↓	↓	↓
	69	-0.0002	—	5.5

章動表は長周期項 23 個、短周期項 46 個　計 69 個　に分類されている。係数には T（ユリウス世紀）のかかわる永年項があるが学習用としては微小なため省略した。⊿φ の内訳は、1″ 台 2 個、0.1″ 台 3 個、0.01″ 台 8 個、0.001″ 台 21 個、0.0001″ 台 35 個　計 69 個（最小値 0.0002″）である。そのうち⊿φ が 0.01″ 以上のものを抜粋したものが表 1.4 である。

表の中で、項番 4 の章動⊿φ はやや大きなものではあるが⊿ε は空欄になっている。

これは太陽の1年周章動で、地球の流体核共鳴によって、θ_xが 0.056″、θ_yが 0.005″という黄経方向に伸びた、ほとんど直線振動に近い楕円運動だろうと考えられている[2]。ウーラードの剛体地球を対象とした章動理論は現在においても基礎であることには違いはないが、地球物理学は弾性さらには流体地球へと進化している。実際の地球の章動は剛体地球の章動よりも少し大きくなることが報告されている[2,3]。

・主要章動の計算のやりかた（簡略版）

①経過通日 day の計算

グリニジにおける 1900 年 1 月 0 日正午（1899 年 12 月 31 日正午と同じ）からの経過日数を day で表す。

元期　ユリウス日 2415020.000

元期からの経過日数を day とする。

②下式に上記の day を代入して角度

単位 度 を計算

day^2 , day^3 項は微小なため省略

F=11.250889+13.2293504490day
昇交点から測った月の平均黄経

D=350.737486+12.1907491914day
太陽と月の平均離角

Ω=259.183275-0.0529539222day
月の平均昇交点黄経

③計算式　単位 ″

1項　$\Delta\phi = -17.2327 \sin\Omega$
　　　$\Delta\varepsilon = 9.2100 \cos\Omega$

2項　$\Delta\phi = -1.2729 \sin(2F-2D+2\Omega)$
　　　$\Delta\varepsilon = 0.5522 \cos(2F-2D+2\Omega)$

3項　$\Delta\phi = 0.2088 \sin(2\Omega)$
　　　$\Delta\varepsilon = -0.0904 \cos(2\Omega)$

24項　$\Delta\phi = -0.2037 \sin(2F+2\Omega)$
　　　$\Delta\varepsilon = 0.0884 \cos(2F+2\Omega)$

参考文献

[1] 長沢工(2001)『天体の位置計算(増補版)』, 地人書館,pp.58-61,49-66, 229-233.
[2] 若生康二郎編(1979)『地球回転　現代の天文学講座 1』,恒星社厚生閣,pp136-137.
[3] 笹雄哲男(1977)『天文月報』70(12), 日本天文学会,pp340-343 19771211.pdf (asj.or.jp)
[4] Frank D.Stacey,Paul M.Davis,訳者代表 本多了(2013)『地球の物理学事典』,朝倉書店,pp92-96,450-451
[5] 天文年鑑編集委員会(2023)『天文年鑑』 2024 年版, 成文堂新光社,pp210.

参考サイト HP

[1] 暦 Wiki/章動 - 国立天文台暦計算室 (nao.ac.jp)
[2] 暦 Wiki/月の公転運動/近地点と遠地点 - 国立天文台暦計算室
[3] Excel で線形補間計算する方法について徹底解説（doboku-engineer.com）
[4]【Excel】フーリエ解析(イメージングソリューション（imagingsolution.net）
[5] Excel で線形補間計算する方法について徹底解説（doboku-engineer.com）
[6]【Excel】フーリエ解析(FFT) | イメージングソリューション（imagingsolution.net）
[7] 解説 1 リサジュー図形の式（www.ne.jp）
[8] 高校数学Ⅲ　二次曲線の回転移動 https://examist.jp/mathematics/quadratic-curve/nijikyokusen-hyoujyunka/

江頭　務