投稿

地球の極運動の図式解法
～天文教具　歯車形デザイン定規～

江頭　務（東亜天文学会）

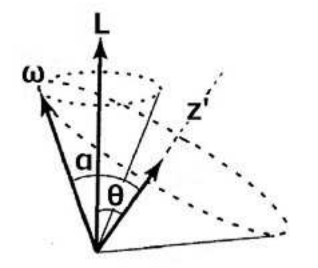
1. はじめに

地球の極運動は、日本天文学会の『天文学会辞典』には次のようにある。[1]

「・・・極運動は自転軸が地球の形状の対称軸である形状軸に対して動き回る運動であるということもできる・・・」

よく言われていることだが、上記の説明で自転軸そのものが動き回っているように誤解する人が多いことである。実は、動いているのは自転軸ではなくて地球本体の方である。

その理由を知ろうと思いオイラーの極運動についての参考書[2]-[8]を見ると、下図に示されるようなポアンソー（Poinsot）の表現と呼ばれる空間円錐と物体円錐が登場する。



L　：角運動量
　　ベクトル
Ω　：瞬間自転軸
z'　：対称軸
　　慣性主軸

図１　ポアンソーの表現[7]
空間円錐と物体円錐の関係
地球タイプ　$I_3 > I$（$\alpha > \theta$）
地球の慣性モーメント
極軸まわり I_3　赤道まわり I
空間円錐（ハーポールホード錐）L 中心の小円
物体円錐（ポールホード錐）z' 中心の大円

そこでは瞬間自転軸が空間円錐と物体円錐が接する位置にあり、物体円錐が空間円錐のまわりをすべることなく回転しているとあるが、これが一般の人にはイメージとしてとらえがたい。また、ゴールドスタイン等の教科書の説明も高校物理の範疇を越えている。

尚、本稿では慣性主軸（極軸）の回転との紛れを防ぐため、以後図１のω軸を地球物理学の用法に従い瞬間自転軸と称する。[3]

そこで本稿では、初心者のために平易に理解できる図式解法とポアンソーに変わるメリーゴーランドの表現を紹介する。尚、回転運動の基礎的な内容につては、丁寧な説明のある[7]がおすすめである。

2. 座標系の変換

本稿では一般に教科書で使われている剛体に固定した座標系ではなく、やや特殊な座標系を用いる。

図２において、x、y、z 軸は静止座標（慣性座標）と呼ばれているもので、Φ、θ、φ はオイラー角で$\dot{\Phi}$と$\dot{\varphi}$はその角速度である。座標の原点は支点で、剛体の質量中心（重心）とする。

新しい座標系 x'、y'、z'は地球の慣性主軸で構成され、$\dot{\Phi}$で回転している。図２は説明用に回転の位置が静止座標に重なる瞬間を図示したものである。

力のモーメントが作用しない無重力空間において、角運動量ベクトルは不変不動である。

最初にこの角運動量ベクトル L を z 軸にセットする。次に y 軸を図のように右に θ だけ回して z'軸としてセットする。

傾斜角 θ は宇宙空間において地球の慣性主軸（極軸）z'と角運動量ベクトル L のなす角で、初期値にして定数である。

系として見るならば、極運動は角運動量ベクトル L である z 軸に直交する xy 面で発生する。$L_x=0$、$L_y=0$、$L_z= xp_y - yp_x$（p 運動量）である。[9]

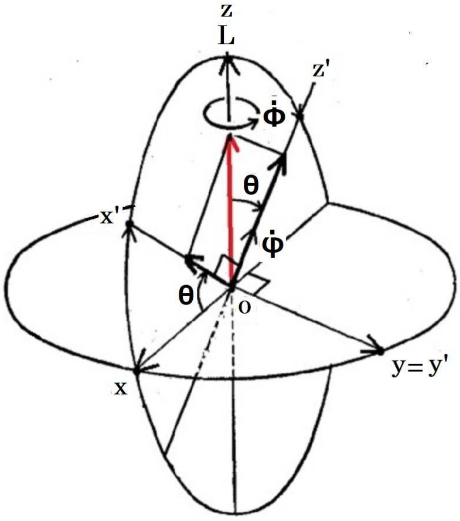


図２ Ｌを中心に$\dot{\Phi}$で回転するｘ’、ｙ’、ｚ’座標系

z 軸と z’軸が形成する平面は xy 平面に垂直である。y’軸は L と直交しているので$\dot{\theta} = 0$であることがわかる。

z’軸にはオイラー角φに対応する$\dot{\varphi}$を付加する。$\dot{\varphi}$の正負は慣性モーメント$I_{z'}$と I の大小関係によって決まる。$\dot{\varphi}$は、地球の対称軸である z’軸を中心に瞬間自転軸が移動する角速度であり、これが極運動理解のポイントとなる。

x’、y’、z’軸により構成される座標系は従来の剛体に固定された座標系とは異なり$\dot{\varphi}$で回転していない。しかしながら、主慣性モーメント I は剛体が回転体であるため剛体の回転とは無関係に一定となり、座標系の一般性は保たれる。

無重力空間において、L は不動であり系としての回転の中心である。理論的には角運動量ベクトル L と傾斜角 θ から、回転運動のすべての要素が導きだされる。図 2 の x’、y’、z’軸の角速度ベクトルωの成分は次のようになる。

$\omega_{x'} = \dot{\Phi}\sin\theta$ (1)式

$\omega_{y'} = \dot{\theta} = 0$ (2)式

$\omega_{z'} = \dot{\Phi}\cos\theta + \dot{\varphi}$ (3)式

3. 極運動の図式解法

図 3 は図 2 を y’方向から眺めた x’,z’座標で、角運動量ベクトル L を z 軸においた地球

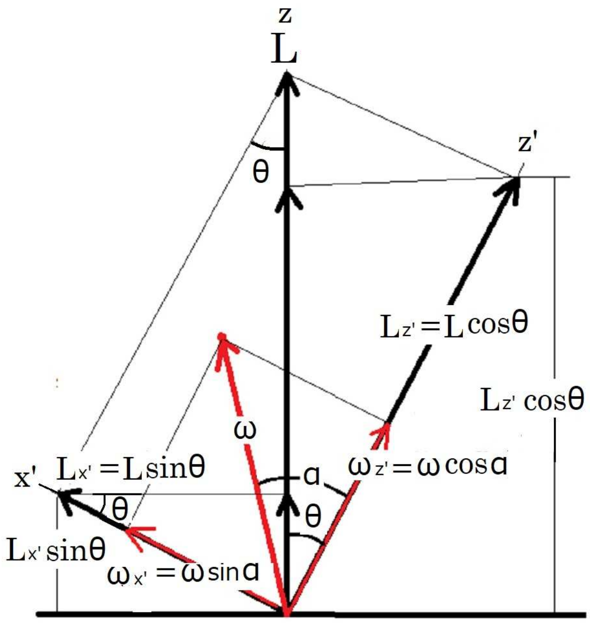


図３ 角運動量ベクトルＬをｚ軸においたベクトル図（地球タイプ $I_{z'} > I$）
慣性モーメント ｘ’軸：Ｉ ｚ’軸：$I_{z'}$
角速度 $\omega_{x'} = L_{x'}/I$ $\omega_{z'} = L_{z'}/I_{z'}$

タイプ $I_{z'}>I$ のベクトル図である。L の慣性主軸上の成分 $L_{x'}$、$L_{z'}$、それから導かれる $\omega_{x'}$、$\omega_{z'}$は一定となる。図 2 から z’軸、z 軸、x’軸は同一平面にある。

ここで重要なことは、角運動量ベクトル L の y’軸上の成分が 0 で、$\dot{\theta} = 0$、θ 一定となることである。このことは、z’軸と x’軸が z 軸を回転軸として$\dot{\Phi}$で円運動をしていることを示している。図 3 より$\dot{\Phi}$は、$\omega_{x'} = L_{x'}/I = L\sin\theta/I$ で、(1)式より$\omega_{x'} = \dot{\Phi}\sin\theta$だから

$\dot{\Phi} = L/I$ (4)式

となる。

次に、z’軸（地球の対称軸）の$\dot{\varphi}$を求めよう。地球の自転速度 $\omega_{z'}$は$\dot{\varphi}$に$\dot{\Phi}$の成分を合成したものであり、下式で表される。

$\omega_{z'} = \dot{\Phi}\cos\theta + \dot{\varphi}$ (3)式

$$\dot{\varphi} = \omega_{z'} - \frac{L}{I}\cos\theta = \omega_{z'} - \frac{L_{z'}}{I}$$

$$= \left(1 - \frac{I_{z'}}{I}\right)\omega_{z'} = \frac{I - I_{z'}}{I}\omega_{z'} \quad (5)式$$

$\dot{\varphi}$は地球のオイラー周期を求める元となる

ものである。これは一般的にはオイラーの回転の運動方程式の力のモーメントを0において、微分方程式を解いて求められる。[7]

しかしながら、力のモーメントが働かない回転においては、上記微分方程式は不可欠なものではないことがわかる。

ここで$\dot{\varphi}$をL、θ、I 、$I_{z'}$のみの定数で表現するために(5)式の$\omega_{z'}$を$L\cos\theta/I_{z'}$に置き換えると

$\dot{\varphi} = \frac{I-I_{z'}}{I\,I_{z'}} L\cos\theta$　(6)式

となる。即ち、$\dot{\varphi}$一定となる。

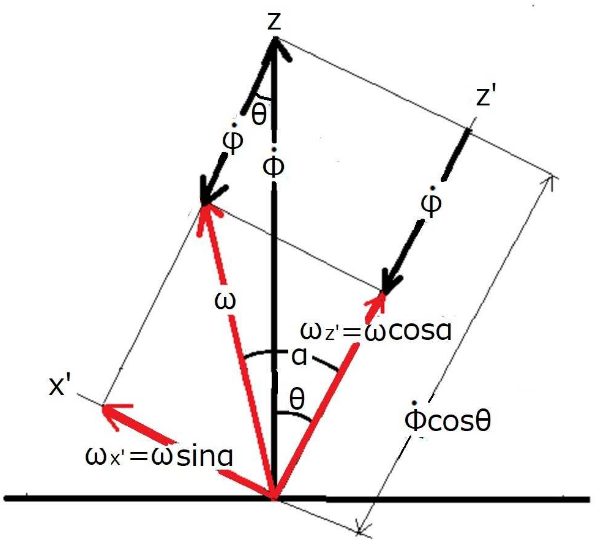


図4　ω, $\dot{\Phi}$, $\dot{\varphi}$のベクトル図（$I_{z'}$ ＞I）

次に、ω、$\dot{\Phi}$、$\dot{\varphi}$のベクトル図を求めよう。図4は地球を想定して$I_{z'}$＞I のケースを描いたものである。図において

$\omega = \omega_{x'} + \omega_{z'}$　(7)式

$L = I\omega_{x'} + I_{z'}\omega_{z'}$　(8)式

である。ここで(8)式に(7)式の$\omega_{x'}$を代入すると

$L = I(\omega - \omega_{z'}) + I_{z'}\omega_{z'} = I\omega + (I_{z'} - I)\omega_{z'}$

となる。これに$\dot{\Phi} = \frac{L}{I}$ (4)式、$\dot{\varphi} = \frac{I-I_{z'}}{I}\omega_{z'}$ (5)式から、上式のLと$\omega_{z'}$に代入すると

$\omega = \dot{\Phi} + \dot{\varphi}$　(9)式

が得られる。ベクトル図は図4に示したようになる。

$\dot{\varphi}$のベクトルは z'軸上において負の方向になる。ωはすべての回転成分の合成であり、力のモーメントが働かないときの回転成分は$\dot{\Phi}$と$\dot{\varphi}$の二つしかない。(9)式はそのことを示している。

ここでωは図4にθを狭角とする余弦定理を適用して、$\dot{\Phi}$と$\dot{\varphi}$に(4)式と(6)式を代入して整理すると（この時は三角形の辺として図式的に絶対値で計算すること）

$|\omega| = \left(\frac{|L|}{I}\right)\sqrt{1 - \frac{{I_{z'}}^2 - I^2}{I_{z'}^2}\cos^2\theta}$　(10)式

となる。上式から$I_{z'}$＞I の時、$|\omega| < |\dot{\Phi}|$である。

極運動は回転運動を構成するω、$\dot{\Phi}$、$\dot{\varphi}$の角速度がL、θと主慣性モーメントI、$I_{z'}$のみの定数で表現できることから、角加速度が関与しない回転であることがわかる。

最後に、図3の角度αとθは次式で求められる。

$\tan\alpha = \frac{\omega_{x'}}{\omega_{z'}}$　(11)式

$\tan\theta = \frac{L_{x'}}{L_{z'}} = \frac{I\omega_{x'}}{I_{z'}\omega_{z'}} = \frac{I}{I_{z'}}\tan\alpha$　(12)式

極運動の半径にあたるθの大きさは、(12)式より$L_{x'}/L_{z'}$で決定される。従って、$L_{x'}=0$ または$\omega_{x'}=0$の時は極運動は起こらない。

また、(12)式より$I_{z'}$＞I の時θ＜α、$I_{z'}$=I の時θ=α、$I_{z'}$＜I の時θ＞αとなることがわかる。$I_{z'}$=I の時はωとLが同相となる。(図3 参照)

4. 地球の極運動の計算

4.1　オイラー周期

地球の慣性モーメント[10]

極軸まわり　$I_{z'}=8.0359\times10^{37}$ kgm²

赤道軸まわり $I=8.0096\times10^{37}$ kgm²

従って地球の場合、前述の$I_{z'}$＞I のケースに相当する。

地球の回転角速度$\omega_{z'}$[10]

$\omega_{z'}=2\pi/86164$s（恒星日）$=7.2921\times10^{-5}$rad/s

太陽日に換算すると

86400/86164=1.00274 回転/日

次に$\dot{\varphi}$は(5)式にI、$I_{z'}$、$\omega_{z'}$を代入すると

$|\dot{\varphi}|=2.394\times10^{-7}rad/s=2.069\times10^{-2}$rad/日

$=3.293\times10^{-3}$回転/日

となる。

従って、瞬間自転軸 ω が地球の極を一周するに要する日数 T を求めると

$$T=\frac{2\pi}{|\dot{\varphi}|}=2\pi\left|\frac{I}{(I-I_{z'})\omega_{z'}}\right| \quad (13)式$$

から、T=303.7≒304 日が算出できる。

これはオイラーが 1736 年に発表したオイラー周期 T と呼ばれるものである。それはその後、チャンドラーによって約 430 日のチャンドラー周期に補正された。

304 日と 430 日の差はオイラーが地球を剛体としたためで、ニューカムによって弾性体とすれば観測値にほぼ合致することが確かめられた。これは(5)式で言えば、$\dot{\varphi}=(1-\frac{I_{z'}}{I})\omega_{z'}$の（$I_{z'}/I$）の比を 0.1%程度低減したことに相当する。このことは質量分布の一様化と言えるだろう。

次の図 5 は極運動の観測結果を示したものである。図において瞬間自転軸が左回りに回転しているのは、宇宙空間で地球が右回転しているからである。

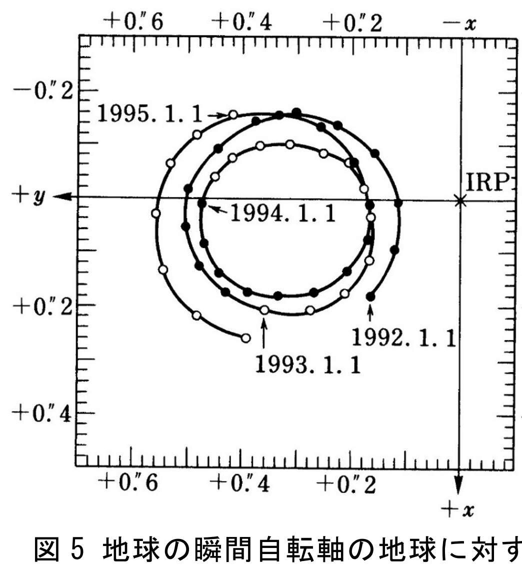


図 5 地球の瞬間自転軸の地球に対する運動の様子[8] [11]

図 5 は 1992 年 1 月から 1995 年 7 月までの極運動北極の観測結果である。座標は角度の ″ で表示。0.1″ は地球表面の距離に換算すると約 3m である。

瞬間自転軸は左回りに回転していることがわかるが、真円からはかなりのずれがある。尚、図中の IRP は基準極原点と呼ばれている地球上の固定点である。図のデータが真円からずれているのは、大気や水の質量分布の季節的変動による年周変化やゆっくりと長期間にわたって変動する成分などが含まれているためで、これらの解明が地球物理学の重要な課題となっている。

4.2 地球上におけるωと z'の回転半径

地球上の 0.1″ あたり距離は地球の極半径を 6357km として

6357km×(0.1/3600)×(π/180)=3.082m

となる。極運動の直径は年ごとにかなり変動しており図 5 のデータでは約 0.4″ であった。この時の地球上の距離は 12.33m となる。

0.4″ の 1/2 の 0.2″ は(11)式の α であるから、α=0.2″ として tanθ は(12)式から次のように求められる。

$\tan\alpha=\tan(0.2/3600)=9.696\times10^{-7}$

$\tan\theta=(8.0096\times10^{37}/8.0359\times10^{37})\times 9.696\times10^{-7}=9.665\times10^{-7}$

$\theta=\tan^{-1}(9.665\times10^{-7})=0.1993''$

となり、

$\alpha-\theta=0.2''-0.1993''=0.0007''$

となる。これは地球上の距離にして 2cm に相当する。従って、近似的には角運動量ベクトル L と角速度ベクトル ω は同じ位置にあり、宇宙空間で不動であると見なせる。

4.3 L ω $\dot{\Phi}$の大きさ

図 3 より $L_{z'}=L\cos\theta=I_{z'}\omega_{z'}$、これから

$L=I_{z'}\omega_{z'}/\cos\theta$ (14)式

$L=8.0359\times10^{37}\times7.292\times10^{-5}/\cos0.1993''$

$=5.860\times10^{33}\ \mathrm{kgm^2/s}$

$\omega_{z'}=\omega\cos\alpha$、これから $\omega=\omega_{z'}/\cos\alpha$ (15)式

$\omega=7.2921\times10^{-5}/\cos0.2''$

$=7.2921\times10^{-5}$ rad/s=1.00274 回転/日

$\dot{\Phi}$は(4)式より$\dot{\Phi}=L/I$

$\dot{\Phi}=5.860\times10^{33}/8.0096\times10^{37}$

$=7.316\times10^{-5}$ rad/s=1.0060 回転/日

表 1 に地球の慣性モーメント、極運動の瞬間自転軸の回転半径、1 太陽日の地球の回転数をベースとして求めた計算結果一覧表を示す。角速度はわかりやすく一日あたりの回転数に換算した。

表 1　地球の極運動に関する計算結果一覧表

項目	値	数式等
極軸まわり $I_{z'}$	8.0359×10^{37} kgm^2	観測値
赤道軸まわり I	8.0096×10^{37} kgm^2	観測値
L から $\omega_{z'}$への距離（半径）α	6.2m（0.2″）	慣性主軸 z'の回転半径
z'軸の角速度 $\omega_{z'}$	1.00274 回転/日	1 太陽日の地球の回転数
角運動量 L	5.860×10^{33} kgm^2/s	$L=I_{z'}\omega_{z'}/\cos\theta$ (14)式
L から ω への距離（半径）α−θ	2cm（0.0007″）	$\tan\theta=\frac{I}{I_{z'}}\tan\alpha$ (12)式
L 軸の角速度$\dot{\Phi}$	1.006 回転/日	$\dot{\Phi}=L/I$ (4)式
z'軸の角度成分$\dot{\varphi}$（右回転）	-3.293×10^{-3} =−(1/304)回転/日	$\dot{\varphi}=\frac{I-I_{z'}}{I}\omega_{z'}$　(5)式
角速度 ω	1.00274 回転/日	$\omega=\omega_{z'}/\cos\alpha$　(15)式

5. 極運動の一般化

ここまでのまとめとして、慣性モーメント $I_{z'}/I$ の比をパラメーターとして極運動を一般化しよう。これにより、地球の極運動の姿がより深く理解できると思うからである。

$I_{z'}>I$ は、図 4 に示した通りである。図 6 は L、I、$\dot{\Phi}$を一定として $I_{z'}$を変化させた時の一連の動きを示したものである。

今(5)式において $I_{z'}$を I に近づけてゆくと$|\dot{\varphi}|$は減少し、ω_A は L に接近するようなる。そして、$I_{z'}=I$ の時には$|\dot{\varphi}|=0$ となり、ω_Bは L に重なる。その時の角速度は(10)式より$\omega_B=L/I=\dot{\Phi}$となる。

さらに $I_{z'}<I$ にすると、ω_Cの位置は z 軸（L 軸）と z'軸の中間に移動し、$\dot{\varphi}$は(5)式から＋の方向（左回転）となる。また ω_Cの大きさは(10)式が成立するので、$\omega_C>\dot{\Phi}$となる。

$\omega=\dot{\Phi}+\dot{\varphi}$ (9)式から、ω は$\dot{\Phi}$に$\dot{\varphi}$を加算したものである。そのため ω は$\dot{\Phi}$先端の B 点を通り慣性主軸 z'に平行な直線上を移動する。

ω と z'軸のなす角 α が α＞θ の時は$\dot{\varphi}<0$（表 2 図 A)、α=θ 時は$\dot{\varphi}=0$（表 2 図 B)、α＜θ の時は$\dot{\varphi}>0$（表 2 図 C）となることがわかる。

また ω が最小となる位置は、ω ベクトルが慣性主軸 z'に直交する（x'軸に重なる）時で $\omega_A=\dot{\Phi}\sin\theta$ になる。

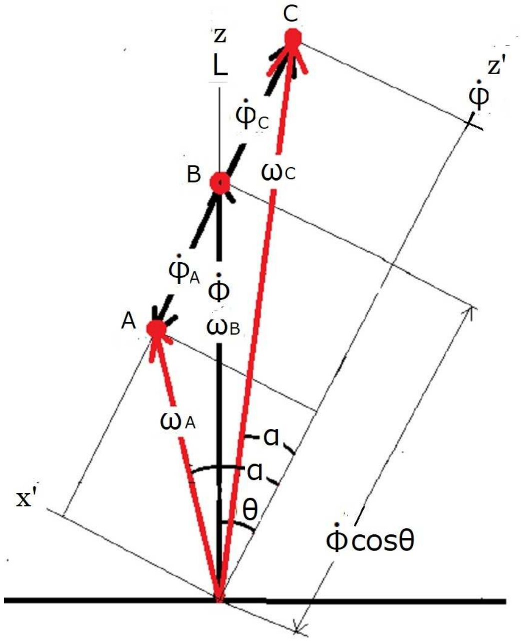


図 6　ω ベクトルの移動と$\dot{\varphi}$の変化

表 2　慣性モーメント $I_{z'}$ /I の比を変化させた時のメリーゴーランド表現

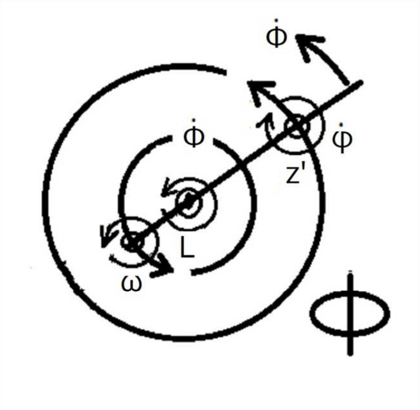
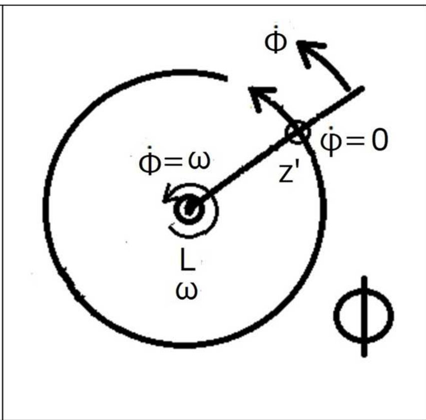
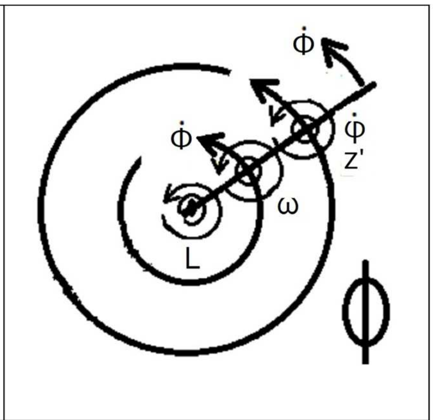
		

図 A　$I_{z'}$＞I	図 B　$I_{z'}$=I	図 C　$I_{z'}$＜I
各図の右下にある図形は、回転する天体の形状のイメージを示す。 図 A は地球タイプの横長状、図 B は球状、図 C は地球とは反対の縦長状となる。		

これらは角運動量ベクトルを回転軸とするメリーゴーランドに例えることができる。表 2 の図 A、B、C はその内容をメリーゴーランド表現で比較したものである。表 2 を球面座標の上面図とするならば、図 6 はその内部構造に相当するものである。

6. 天文教具による実験

6.1　実験の準備

天文教具と言ってもたいそうなものではない。樹脂製の歯車を組み合わせて様々な曲線を描くおもちゃのデザイン定規である。

Training Toy デザイン定規

購入先 Amazon　600 円（表 5、6 参照）

表 3　歯車の組み合わせ

模擬	歯車小	リング状歯車
I_3＞I α＞θ	外径 22mm 歯数　32 枚	内径　66mm 歯数 105 枚
I_3＜I α＜θ	外径 32mm 歯数　49 枚	外径　97mm 歯数 150 枚

＜歯数比 n＞　I_3＞I　n=105/32=3.28
　　　　　　　I_3＜I　n=150/49=3.06

まずリング状歯車に張り付ける長方形の板に、歯車の中心となる位置に小さな穴をあけておく。（表 5,、6 参照）

リング状歯車の中心に穴をセットして、長方形の板を接着する。この穴が対称軸 z'となる。

次に、十字の方位線を描いた厚紙の上に小さな歯車を張り付ける。小さな歯車は空間円錐、大きなリング状歯車は物体円錐を表す。角運動量ベクトル L の位置は小さな歯車の中心で不動である。

$\dot{\Phi}$の回転を右方向にも視野を広げると、極運動は次の四つのパターンに分類される。

表 4　極運動の四つのパターン I～IV

	L の方向	慣性モーメント	$\dot{\Phi}$回転
I	上向き	I_3＞I	左回転
II	上向き	I_3＜I	左回転
III	下向き	I_3＞I	右回転
IV	下向き	I_3＜I	右回転

瞬間自転軸の角速度ベクトル ω は、小さな歯車と大きな歯車の接点にあり空間円錐を回転する。角運動量ベクトル L、瞬間自転軸の角速度ベクトル ω、対称軸 z'は直線上にある。ここで、z'を始点として L に向かう直線を基準線Φ、物体円錐上の固定点に向かう直線を基準線φと呼ぼう。

表 5、6 において画像中央の〇印が角運動量ベクトル L の位置、☆印シールが物体円錐上の固定点を示す。

6.2 実験結果

表 5、6 の図中に表記した角度は表 3 の歯車比 n にて計算したφの値である。歯車のかみ合わせの関係等により画像の表示値と実測値とは若干のずれがある。

（1）パターンⅠ 表 5 の説明 太胴タイプ

これは $I_3 > I$ であるから地球タイプに相当し、☆印シールは北極上の固定点となる。

表 5 に示されたように、対称軸 z'が角運動量ベクトル L を 90°左回転するごとに、対称軸 z'のφが基準線Φから 27°ずつ右回転していることがわかる。

☆印シールが物体円錐上を移動した距離は、大小の歯車の接点にある瞬間自転軸ωが空間円錐を移動した距離に等しい。図 I-5 の☆印シールの 110°は対称軸 z'が空間円錐を一周した時のφの回転角に相当する。

（2）パターンⅡ 表 6 の説明 細胴タイプ

表 6 に示されたように、対称軸 z'が角運動量ベクトル L を 90°左回転するごとに、対称軸 z'のφが 29°ずつ左回転していることがわかる。前者の地球タイプとの大きな違いは、対称軸 z' のφの回転方向が反対になることである。

また、図 II-5 の☆印シールの 118°は対称軸 z'が空間円錐を一周した時のφの回転角に相当する。対称軸 z'が一回転する間に、瞬間自転軸ωが物体円錐を移動する角度は、移動の向きが異なるだけで前者と同類である。

（3）パターン III、IV

パターン III、IV は I、II のケースに対応し、角運動量ベクトル L の向きを逆にしたもので、$\dot{\Phi}$、$\dot{\varphi}$、ωの角速度ベクトルの回転方向はすべて逆転する。これは表 2 を裏側から見たものとなる。実験結果は省略するが念のため各自で確認されたい。

（4）瞬間自転軸の移動

ここで、対称軸 z'が$\dot{\Phi}$で空間円錐を一周する間に、瞬間自転軸 ω が物体円錐を移動する角度φを求めよう。

まず、物体円錐の半径を r_b 、空間円錐の半径を r_s として、その比 n を求めると

$$n = \frac{r_b}{r_s} = \frac{\omega\sin\alpha}{\omega\sin(\alpha-\theta)} = \frac{\tan\alpha}{\tan\alpha\cos\theta-\sin\theta}$$

この n は実験における表 3 の歯車比である。ここで(11)式より tanα を求めて上式に代入すると

$$n = \frac{I_{z'}}{(I_{z'}-I)\cos\theta} \quad (16)式$$

となる。一方、(3)式と(5)式から

$$\omega_{z'} = \dot{\Phi}\cos\theta + \dot{\varphi} = \frac{I}{I-I_{z'}}\dot{\varphi} \quad (17)式$$

$$\left|\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\Phi}}\right| = \left|\frac{I_{z'}-I}{I_{z'}}\cos\theta\right| = \frac{1}{n} \quad (18)式$$

即ち、歯車比 n は$|\dot{\Phi}/\dot{\varphi}|$に等しくなることがわかる。$I_{z'} > I$ の時、Φが 1 回転するときのφは表 3 より 360°/n=360°/3.28=110°となる。これはΦの回転方向の逆行として作用する。

また、$I_{z'} < I$ の時のφは表 3 より同様に 360°/3.06=118°となる。これはΦの回転方向の順行として作用する。

(17)式においてθが 0 に近く無視できる時、$\omega_{z'}$による回転角 S はΦとφの算術和として下式で表される。

$$|S| = |\Phi| \mp |\varphi| = |\Phi|(1 \mp \frac{1}{n}) \quad (19)式$$

Φが n 回転で瞬間自転軸が物体円錐を一巡した時の、S の回転数は逆行（内回り）の時(n-1)回転、順行（外回り）の時(n+1)回転となる。即ち、内回りか外回りかのコースによって直線上を転がる場合と比較して±1 回転の差が生じる。

これは数学的にはハイポサイクロイド（円周の内側を回転する円周上の点の軌跡）、エピサイクロイド（円周の外側を回転する円周上の点の軌跡）として知られている。

表5　パターンⅠ　太胴タイプ $I_3>I$　$\dot{\Phi}$左回りのケース（地球タイプ）n=3.28

大きな歯車の内側に小さな歯車をセット、瞬間自転軸 ω は大小の歯車の接点にあり

基準線Φの向き　対称軸 z'の位置から角運動量ベクトル L（〇印）の方向

基準線φ の向き　対称軸 z'の位置から物体円錐上の固定点（☆印）の方向

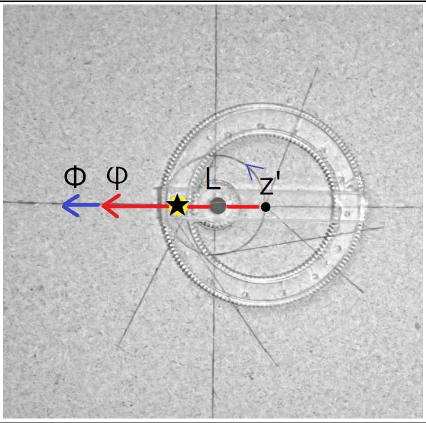


図 I-1　スタート位置。
大小の歯車をかみ合わせながら、対称軸 z'の穴を左回転させる。

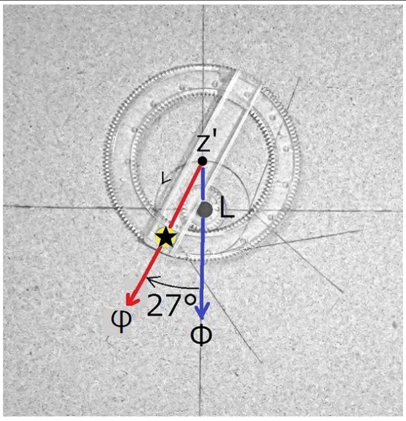


図 I-2　対称軸 z'が初期位置から 90°左回転。
対称軸 z'を中心として☆印シールは基準線Φから 27°右に回転。

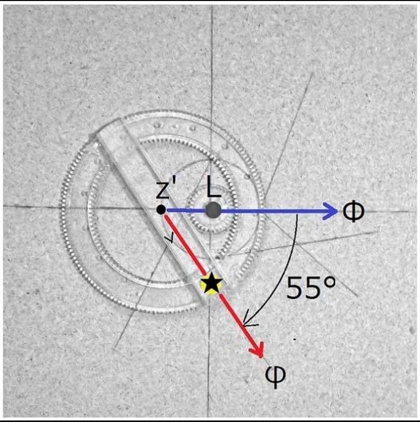


図 I-3　対称軸 z'が初期位置から 180°左回転。
対称軸 z'を中心として☆印シールは基準線Φから 55°右に回転。

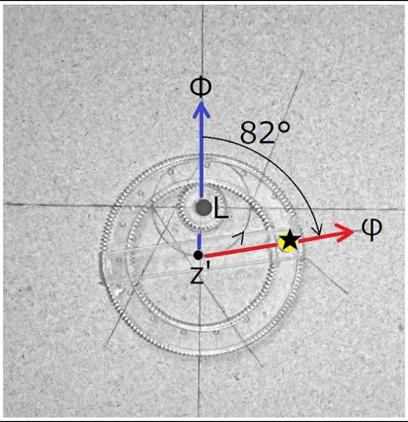


図 I-4　対称軸 z'が初期位置から 270°左回転。
対称軸 z'を中心として☆印シールは基準線Φから 82°右に回転。

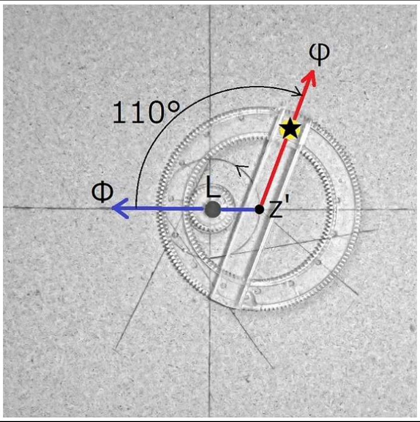


図 I-5　対称軸 z'が初期位置から 360°左回転。
対称軸 z'を中心として☆印シールは基準線Φから 110°右に回転。

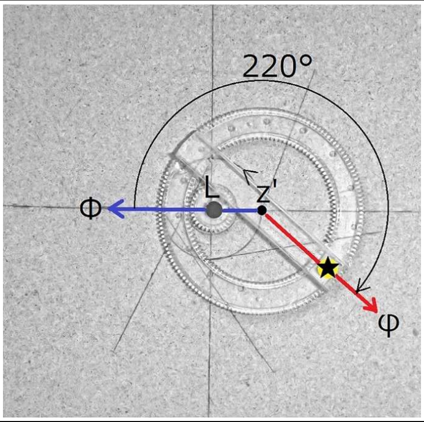


図 I-6　対称軸 z'が初期位置から 2 回転。
対称軸 z'を中心として☆印シールは基準線Φから 220°右に回転。

表 6　パターン II　細胴タイプ $I_3<I$　$\dot{\Phi}$左回りのケース n=3.06
小さな歯車の外側に大きな歯車をセット、瞬間自転軸 ω は大小の歯車の接点にあり
基準線Φの向き　対称軸 z'の位置から角運動量ベクトル L（〇印）の方向
基準線φ の向き　対称軸 z'の位置から物体円錐上の固定点（☆印）の方向

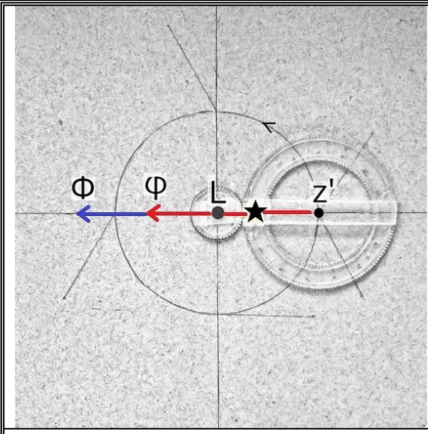


図 II-1　スタート位置。
大小の歯車をかみ合わせながら、対称軸 z'の穴を左回転させる。

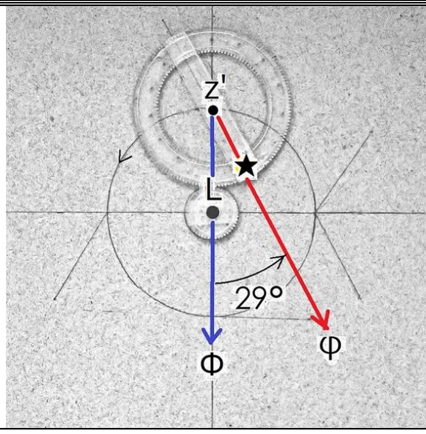


図 II-2　対称軸 z'が初期位置から 90°左回転。
対称軸 z'を中心として☆印シールは基準線Φから 29°左に回転。

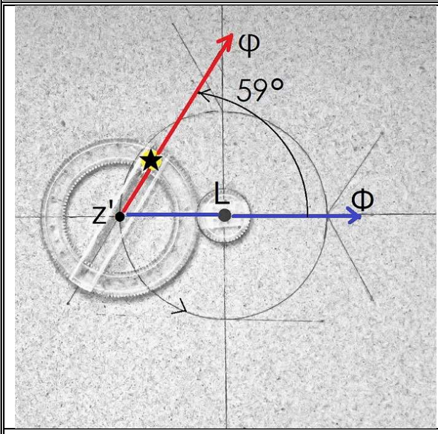


図 II-3　対称軸 z'が初期位置から 180°左回転。
対称軸 z'を中心として☆印シールは基準線Φから 59°左に回転。

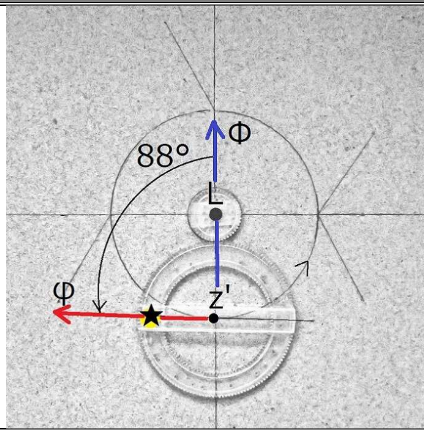


図 II-4　対称軸 z'が初期位置から 270°左回転。
対称軸 z'を中心として☆印シールは基準線Φから 88°左に回転。

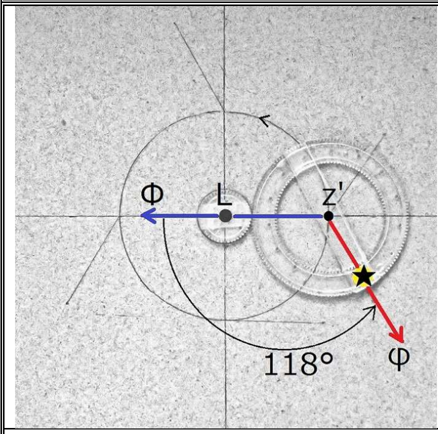


図 II-5　対称軸 z'が初期位置から 360°左回転。
対称軸 z'を中心として☆印シールは基準線Φから 118°左に回転。

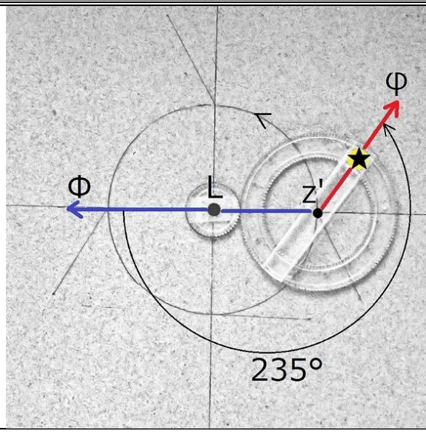


図 II-6　対称軸 z'が初期位置から 2 回転。
対称軸 z'を中心として☆印シールは基準線Φから 235°左に回転。

7. まとめ

まえがきで述べたようにポアンソーの表現はかなり難解である。そこでまとめとしてより簡明と思われる次のメリーゴーランドの表現を比喩的な解説文とともに紹介する。

＜極運動はメリーゴーランド＞

今ここで、あなたが宇宙空間に浮かぶメリーゴーランドに乗っているとしよう。

メリーゴーランドは表 5 の地球タイプの構造とする。その回転盤は地球の北極部を、半径約 10m で切り取ったもので幾何学的には球面をしている。従って、L、$\dot{\Phi}$、$\dot{\varphi}$、ωの各ベクトルは回転盤に直交している。

メリーゴーランドの回転軸（角運動量ベクトル L）は、宇宙空間に固定されていて透明なアクリルで作られている。L からの距離は、ω が 2cm 程度、$\dot{\varphi}$が約 6m である。L と ω は、ほんど重なっている。

そしてあなたが乗っている座席（地球の対称軸 z'、$\dot{\varphi}$の位置）は、正面にその回転軸が見えるように固定されているとしよう。従って、正面から眺めるとアクリルの回転軸を通して瞬間自転軸 ω が見えるはずだ。これは、メリーゴーランドが静止していようが回転していようが変わらない。

もしここで、瞬間自転軸が左回転しているように見えたとするならば、固定されているはずのあなたの座席（対称軸 z'）が右回転していることになる。

これをメリーゴーランドの外側の観察者（船外活動中の宇宙飛行士）から眺めると、あなたの座席は宇宙空間で 1 日 1 回左回転しながら、それとは別に 304 日のオイラー周期で右回転していることがわかる。

あなたがメリーゴーランドの外側を眺めると星空が回転している。

その回転速度こそが、あなたの置かれている立場（自転）を静かに物語っている。

文　献

[1] 日本天文学会『天文学会辞典』, https://astro-dic.jp/polar-motion/

[2] 福島登志夫編(2017)『天体の位置と運動』, 日本評論社, pp.181-210.

[3] 若生康二郎 (1979)『地球回転』,恒星社厚生閣, pp.109-120, 169-213.

[4] ゴールドスタインら(2006)『古典力学の(上)』, 吉岡書店, pp.265-275.

[5] 瀬藤憲昭(2009)『古典力学問題のとき方(物理学叢書)』, 吉岡書店, pp.157-160, 185-189.

[6] 江沢洋, 中村孔一, 山本義隆(2011)『演習詳解　力学』, 日本評論社, pp.229, 259-263.

[7] 大島隆義(2012)『自然は方程式で語る』, 名古屋大学出版会, pp.448-451, 387-393, 412-423.

[8] 安井久一(1998)『こまはなぜ倒れないか』, 共立出版, pp.40-53.

[9] 村上雅人(2015)『なるほど力学』, 海鳴社, pp.126-146.

[10] ステイシー,デイヴィス(2013)『地球の物理学事典』(本多了　訳), 朝倉書店, pp.96-99, 450-451.

[11] 国立天文台編(1996)『理科年表』, 平成 8 年　丸善出版, pp172.

江頭　務