投稿

内惑星の華麗なダンス
～驚くような軌道傾斜の妙味～

加藤賢一（星学館）

1. はじめに

高等学校レベルで扱える教材として惑星運動がとり上げられることがある。筆者もその一つの試みとして火星の位置データから軌道要素を求める手法を本誌に紹介したことがある[1]。

この種の教材の対象には火星が選ばれることが多く、水星や金星に注目する場合は最大離角を使う場合がほとんどで、内惑星に正面切って取り組むような教材が少ないように感じられる。プトレマイオスやコペルニクスが水星には手を焼いたことが知られているから、きっと教材には向かないのだろうと思いながらも、少し気になった。そこで、水星と金星の運行を少し調べてみたので、教材開発の試みとしてご報告したい。

2. 太陽からの離角

水星と金星の位置データは理科年表などの暦にあるが、ここでは[1]と同様に Van Flandern & Pulkkinen（1979）[2]の手法を用いて計算することにした。これは計算精度が数分と、精度は低いが、一応、惑星間の摂動も考慮されている。

これで太陽との黄経差と黄緯差を求めた結果を図示しておこう。天文年鑑等で毎年紹介されているようなものと同じである。図 1 と図 2 に短期間の変化を示したが、これからでもいろいろなことを考えさせられる。2000 年前、これを提示されたらどのような系を考えるだろうか。

図 3 と図 4 はもう少し長い期間（2001 年から 2020 年まで）の様子を計算した結果である。

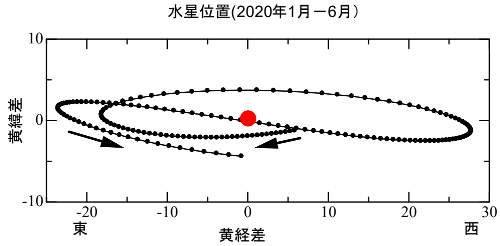

図 1　水星、2020 年 1 月～6 月
太陽に対する相対的な位置

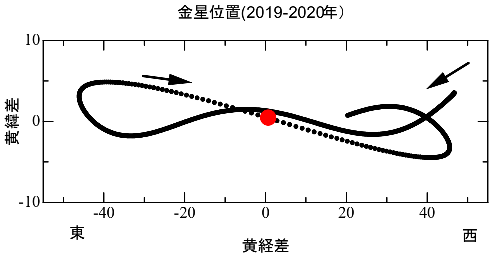

図 2　金星、2019 年～2020 年

いかがだろうか。何とも複雑で、しかも、いとも華麗な動きを見せている。初めて見た時、間違いではなかろうかと思ったほどである。

これをどのように解釈したら良いか。惑星軌道と地球軌道との組み合わせである。ある面上を動きまわる 1 点からもう 1 つの面上の点を見ているだけで、こんな複雑な軌跡ができるものだろうか。

水星（図 3）を見ると、まず黄道面に対し非対称で、黄緯差は-5°から+4°に分布している。しかし、水星の軌道面は黄道面と太陽で交差しているのだから、短期間ではそのように見えることがあったとしても長期間では平均化されて対称的になるべきではなかろうか。

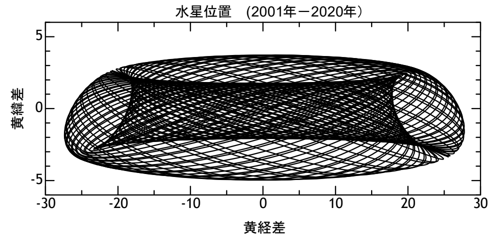

図 3　水星、2001 年～2020 年

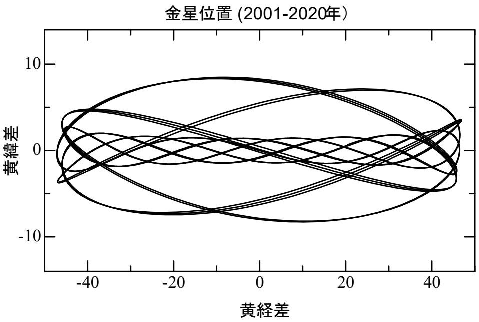

図 4　金星、2001 年～2020 年

金星（図 4）では軌跡の系列が 2 つあるように見える。どのような視点の移動を考えればこうなるのだろうか。

1900 年前､プトレマイオスは惑星運行論を作る時、ヒッパルコスらが行った西方、東方最大離角時のデータ（図 1－4 で言えば両端点のデータ）だけを用いて、途中の軌跡を想像しながらそのメカニズムを考えた。さすがの彼にも十分難しく、この問題がアルマゲスト[3]の最後の 13 巻に残されたことから推察されるように、残念ながら、素直に納得でききような理論は作れなかった。プトレマイオスの地球中心説における惑星軌道は誘導円とその上に乗っている周転円の 2 つから成っていて、誘導円は地球を含む軸で黄道面と交差するとした（地球中心なるがゆえに他に選択肢がなかった）から、今から見れば根本的に的外れで（太陽で交差しなければならない)、うまくいくわけはなかった。

それはさておき、円軌道上を巡る惑星と地球の組み合わせでこうした動きをどこまで説明できるだろうか。

3. モデル計算の手続き

ここで、簡単化のため軌道を円で近似し、それが傾斜しているとして黄経、黄緯を求めてみることにした。

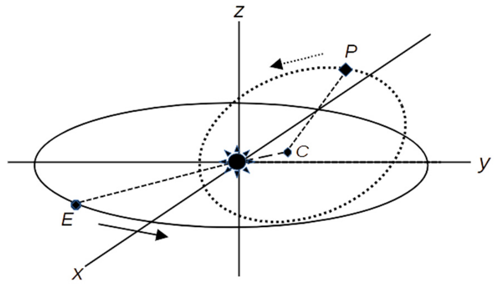

図 5　軌道の概念図

図 5 で中心が太陽､点線で描いた円が水星、金星の軌道で、中心 C が太陽からずれた離心円とする。E が地球で、黄道面上の円軌道を回る。黄道面上に xy 座標軸をとり、図のように z 軸を考える。それぞれは一様回転するとし、距離は天文単位で計る。

・軌道と位置

初め、太陽を原点とする。

地球の位置（x_E, y_E, z_E）: 偏角は$\omega_0 t$と、時間tに比例する。$\omega_0 = 360°/P$（$P = 365.25$ 日）である。

$$\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

惑星の原点位置（x_0, y_0, z_0）: 太陽からの距離をr_0、偏角（近日点黄経）をθ_0とする。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \cos \theta_0 \\ r_0 \sin \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

惑星の位置（x_1, y_1, z_1）：原点から惑星までの距離をr、偏角を$\omega_p t$としておく。$\omega_p = 360°/P$で、水星では$P = 88$ 日、金星で$P = 225$ 日。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\omega_p t \\ r\sin\omega_p t \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

・昇交点まで座標回転（x_2, y_2, z_2）

軌道面が傾斜する軸となる交点まで向くように軌道面を回転させることとし、その角度をλ_0（昇交点黄経）とする。それは、以下のように、z 軸の周りにλ_0だけ回転させる座標回転で行う。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda_0 & -\sin\lambda_0 & 0 \\ \sin\lambda_0 & \cos\lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

・軌道の傾斜（x_3, y_3, z_3）

昇交点・降交点を結ぶ交点線で軌道傾斜角iだけ回転させることにしよう。

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

・原点を地球に移動（x_4, y_4, z_4）

視点を地球に置くため、原点を地球に移すことにし、(5)式から(1)式を引く。

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{pmatrix} \qquad (6)$$

以上で(x, y, z)座標系での位置が得られたので、次の操作によってこれを極座標系(R, λ, β)へ変換する。

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\beta\cos\lambda \\ R\cos\beta\sin\lambda \\ R\sin\beta \end{pmatrix} \qquad (7)$$

これで惑星の黄経λ、黄緯βが得られる。

・太陽の黄経と惑星との差

太陽の黄経は$-\omega_0 t$であることから、黄経差$\lambda + \omega_0 t$、黄緯差βを求めることができる。

4. モデル計算の結果－水星

以上の手続きにより、計算を行った例を図 6、図 7 に掲げる。軌道長半径は 0.39、離心率は 0.21、傾斜角は7°、近日点黄経77°、昇交点黄経48°というパラメータを考慮した。

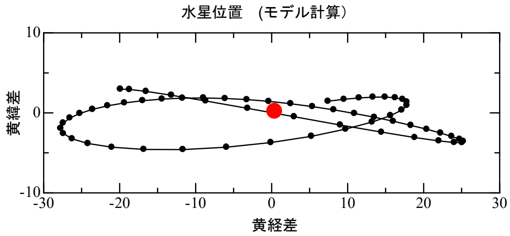

図 6　水星、半年分のモデル計算

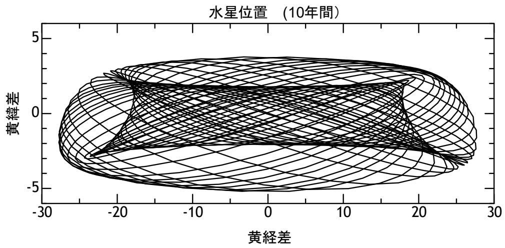

図 7　水星、10 年間のモデル計算

細部を除き、ほぼ図 1、図 3 の雰囲気を再現している。図 3、図 7 に見られる 2 重構造は離心の効果で、最大離角に大きな差があることに符合していて、これはこれまで知られてきたことである。また、黄経差の上下幅の大きさは軌道傾斜角によるもので、これも予想通りであった。顕著に目立っていた黄緯の上下の非対称性は近点離角と昇交点黄経の効果であった。昇交点黄経を0°に設定した場合の結果を図 8 に示しておいた。

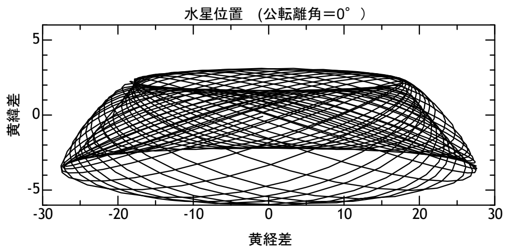

図 8　水星、昇交点黄経を0°に設定した場合のモデル計算

5. モデル計算の結果－金星

金星の軌道長半径は 0.72、離心率は 0.07、傾斜角は3.4°、近日点黄経132°、昇交点黄経77°となっている。これらに基づいた計算結果が図 9、図 10 である。

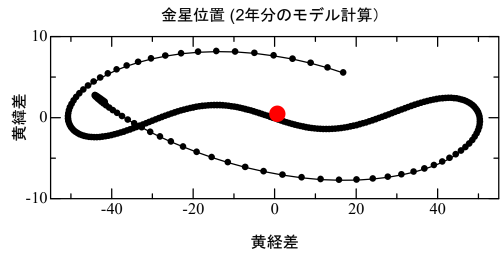

図 9　金星、半年分のモデル計算

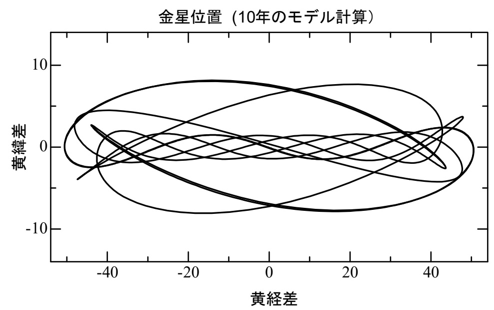

図 10　金星、10 年間のモデル計算

金星の振る舞いも水星に同じで、軌道要素が異なることで結果に違いが生じているだけのことである。

6. おわりに

このような複雑な運行となるのは惑星の摂動の影響があるからではないか、と当初疑ったが、豈図らんや、2 つの惑星の単純な組み合わせの結果に過ぎなかった。軌道面が傾斜しているだけでこれだけのバラエティが生じるのである。幾何学的な効果の華やかなことに今更ながら驚いてしまった。

プトレマイオス[3]は金星が図 2 のように波打つかのように動くことから、軌道面が振動するとして運行論を作っていった。地球は動かないとしているから、運行の原因を各惑星が全て担うことになり、複雑な運行論になった。私たちには太陽中心という見方があって、この複雑な動きを造作なく再現できたことを確認したい。

ここで用いた数学は三角関数、極座標表示、座標回転、行列などである。座標回転は少し高級かもしれないが、その他は高校数学の範囲である。数値計算には表計算ソフトが使えるだろうし、教材化を図って戴ければありがたいと思っている。

文　献

[1]加藤賢一 (2019)　天文教育普及研究会 会誌 161 号, p.5.

[2]Van Flandern, T. C., & Pulkkinen, K. F. (1979) ApJS, 41:391.

[3]薮内清訳 (1982) プトレマイオス著『アルマゲスト』, 恒星社厚生閣.

加藤賢一
keirumba@aria.ocn.ne.jp