投稿

ティコのデータを前にして ～ケプラーの気分になって～

加藤賢一（星学館）

1. はじめに

ケプラーがティコ・ブラーエの観測データに基づき地球と火星の軌道を求め、楕円であることや面積速度一定の法則など重要な諸法則を求めることに成功したこと、それがやがてニュートンの重力の法則の発見を導いたという歴史は良く知られている。微積分発見以前の研究であり、学校教育で言えば高校から大学初年あたりのレベルであるため、現に、高校や大学での卒業研究等（たとえば、慶應義塾高等学校の卒業研究[1]、佐賀大学での実践研究[2]）にもとり上げられている。そういう点では目新しさはないのだが、これらの実践例は平面上で三角測量法によって軌道の形を求めるという内容となっているのに対し、もう少し一般的に、そして軌道の形だけでなく、傾斜角なども含む全ての軌道要素を求めるにはどうしたら良いかを考えてみた、ということで報告したい。

2. 与えられた素材など

実際の観測データを集めるのは大変なので、手元にある惑星位置計算コード[3]を用いて太陽と火星の地心黄経、黄緯を求め、観測データと見なすことにする。計算精度が数分なので丁度ティコの観測データに匹敵する。火星が 10 回ほど公転する期間である 2018 年から 2039 年までの 20 年分を計算した。ティコの観測期間よりやや短い。この程度のデータがないと軌道が決まらないので、この年数になった。

それから、会合周期 779.9 日、公転周期 1.88085 年＝687.0 日（理科年表、2019）などが分かっているとする。

また、かつてプトレマイオス時代の人たちが太陽、惑星の軌道に離心円やエカントを導入し、不規則な動きや距離の変化を説明しようとしたことや、コペルニクスがさらに昔の同心円モデルに戻してしまい（中心を太陽に移したことがあったとしても）、結局は周転円を使わざるを得なかったことなど、当時の状況はある程度把握しているものとしたい。

それから、ケプラーは最初に惑星軌道は平面かと問うているが、これは自明としよう。黄道を見ると滑らかに続いているから地球軌道は平面だろうと思えるものの、逆行時の動きなどでは交差したりすることもあって、火星軌道が平面かどうかは確かに疑わしい。が、ここではこの問題はおいておこう。

3. 昇交点、降交点

太陽と火星の黄経、黄緯データを見てすぐ気づくのは火星黄経が 0°を挟んで振動していることである。火星黄経が 0°ということは火星が黄道面上にあるということだから、そこが交点線（昇交点、降交点を結ぶ線をこう呼ぼう）となっているはずだ。そこで、2018 年から 2021 年までの間で火星黄経が 0°に近い日を選ぶと表 1-1 のようになり、その時の位置データは表 1-2 のとおりである。FJD は半日ずれのユリウス日である。

表 1-1 の①から②までが 305 日なのに対し、②から③までは 382 日と、大きく違っている。①と②の間の 2018 年 7 月 28 日が衝だったことを思い返すと、①から②までは地球が火星を追い越すような動きをし、②から③の間は地球が遠ざかるような状態だったことが推察される。①を過ぎると火星の黄緯が負になっ

たから、①は降交点通過、②は昇交点通過だったようだ。

表 1-1 交点線通過日

番号	年	月	日	FJD
①	2018	3	17	2458194.13
②	2019	1	16	2458499.13
③	2020	2	2	2458881.13
④	2020	12	2	2459185.13
⑤	2021	12	20	2459568.13

表 1-2 交点線通過日の位置データ

番号	火星		太陽
	黄経 l	黄緯 β	黄経 ls
①	269.386	0.005	355.968
②	9.795	0.008	295.161
③	259.822	0.001	312.204
④	17.165	-0.008	249.881
⑤	244.356	-0.001	267.923

4. 地球軌道、火星軌道の決定法

地球と火星の位置を xyz 座標系で決めることを考える。地球を原点に太陽と火星の座標（xs、ys、zs）と（x、y、z）を書いてみよう。ある時刻 T1 での値であることを示すため、各変数に 1 の添え字をつけて

$$(xs1、ys1、zs1) = (a1\cos(ls1), a1\sin(ls1), 0) \qquad (1)$$

$$(x1、y1、z1) = (b1\cos(\beta 1)\cos(l1),\ b1\cos(\beta 1)\sin(l1),\ b1\sin(\beta 1)) \qquad (2)$$

と書いておく。a、b は地球・太陽間距離、地球・火星間距離である。ls は太陽黄経、l と β は火星の黄経、黄緯で、これらは観測からわかる。したがって、地球・太陽間距離 a1、地球・火星間距離 b1 が分かれば位置は確定する。結局、軌道を決める問題は距離を決める問題に帰着する。

火星の日心位置（x、y、z）を作っておく。座標原点を地球から太陽に移せばよいから、(2)から(1)を引いて、

$$(x、y、z) = (b1\cos(\beta 1)\cos(l1) - a1\cos(ls1),\ b1\cos(\beta 1)\sin(l1) - a1\sin(ls1),\ b1\sin(\beta 1)) \qquad (3)$$

と書くことができる。

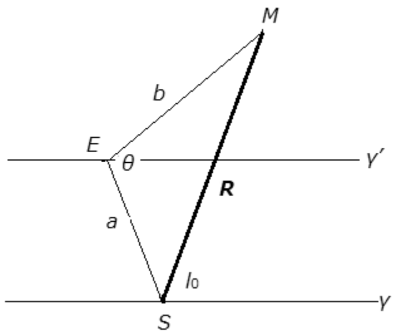

図 1 太陽 S、地球 E、火星 M の位置関係
γ、γ' は春分点の方向

4.1 地球軌道

ある時点での位置観測からわかるのは太陽と火星の離角だけで、2 つの距離を求めるには情報が足りない。そこで、ケプラーが目をつけたのが衝を利用することで、衝になると太陽－地球－火星と並ぶので、火星黄経 l が火星の日心経度 l_0 に等しくなるのである。図 1 の l_0 である。この衝から 1.88 年後の時刻 T1、火星が太陽を一周して元に戻って来た時、地球は図 1 中の E に来ていたとしよう。

軌道の形というのは日心経度に対する距離の関係のことだから、日心の火星位置（距離、経度、緯度）を（R、l_0、b0）と書いて表すとしよう。すると、衝には l_0＝l1 となるとい

うことだから、

(x、y、z) =
(R cos(b0) cos(l1) , R cos(b0) sin(l1) ,
R sin(b0)) (4)

と書くことができる。衝の時の位置データから(3)式を作ると、火星 M の位置を(3)と(4)の 2 通りの形式で表現できたことになる。これらは同じ M の位置を表しているのだから xyz の値はそれぞれ等しい。このことから、3 本の等式が得られる。一方、変数は R、a1、b1、b0 の 4 つだから、どれか一つを（ここでは太陽・火星間距離 R を選択した）を既知と見なせば、他の 3 つが全て決まる。これでこの時点における地球位置と火星位置が定まることになる。

これから火星がさらに公転してまた M に戻って来たとしよう。時刻 T2 である。火星は戻るが、地球は E からややずれたところに来ているだろうから、同様の手続きで T2 での地球位置と火星位置が決まる。火星位置は前と同じだから､新しいのは地球位置である。これをさらに一公転後 T3 でやれば、新しい地球位置がわかり､・・・、と順次、地球位置が決まっていく。

これを続けて行けば地球軌道の輪郭が見えてくる。が、1.88 年で 1 点だから軌道全周となると 20 年間ほどの観測データが必要となる。ケプラーが長年にわたるティコのデータを欲しがった理由である。

4.2 火星軌道

以上の手続きで地球軌道が確定すれば、火星軌道を決めるのはそれほど難しくはない。図 2 をご覧いただきたい。ある時刻 T1 に火星 M を観測したとしよう。それから火星の一公転後 T2 にもう一度観測する。その位置データを用いて T1、T2 における(3)式を書き下し、xyz の値が等しいとして 3 本の等式を立てる。地球軌道は確定したから距離 a1、a2 が分かっているので、変数は地球・火星間距離 b1 と b2 のみとなり、これらを求めることができる。そして、最終的に日心座標値が得られる。日を変えてこれをくり返していけば火星軌道が見えてくる。ただし、距離はあくまで相対的であることに注意が必要である。

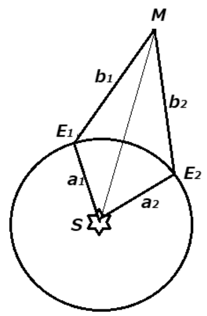

図 2 火星軌道の決定法

5. 昇交点、降交点位置の決定

昇交点、降交点を上の定式化の応用として求めることができる。すでに軌道は決まったのだから、そのためだけならこんな手続きは不要である。

火星の日心位置(3)式で、昇交点、降交点は $\beta=0$ とすれば良い。表 1-1 の①、③、⑤は降交点通過、②と④は昇交点通過日で、それぞれの火星の座標値は同じになることから、黄経 l を求めることができる。表 1-2 のデータを式(3)に入れて実際にやってみると 49.3°となった。ちなみに、理科年表（2019）によれば 49.499°である。

6. 軌道傾斜角

昇交点、降交点と関連しているのが軌道の傾斜である。その傾斜角は火星軌道が決まれば分かるのだろうが、その前に知ることができる。

交点線上に地球が来ると、そこは火星軌道

面上でもあるから、そこから交点線と直角方向にある火星の黄緯は火星軌道面の傾きそのものになるはずである。そこで、2018 年から 2020 年までの間で該当する日を探ると、地球が交点線を通過するのは年に 2 回で計 8 回あった。ただ、ずばり一致するものはなく、それに近いのが 2 回あって、2018 年 11 月 13 日に離角 98°で黄緯が-1.813°、2020 年 5 月 10 日に離角 278°で黄緯が-1.823°となっている。これから軌道傾斜角 i の近似値として 1.82°が得られる。ちなみに、理科年表 (2019) によれば 1.848°である。

7. 地球軌道決定

先に紹介したように地球軌道を決めるには 20 年程度のデータが必要である。そこで、2018 年 7 月 28 日の衝を起点とし、その後の 10 回公転分のデータを使うことにする。それが表 2-1、2-2 のデータである。そして、衝の時の太陽・火星間距離 R を 1 とした時の太陽・地球間距離を表 2-2 の最後の列に掲げた。太陽黄経 ls＋180° が日心経度であるから、（日心経度、距離）という形で軌道が決まったことになる。

その結果を図示したのが図 3 で、距離は 2035 年 7 月 2 日の距離を 1 とした表示となっている。ただし、4 周目と 5 周目の結果を省いた。表 2-2 を見れば分かるように、火星が合の前後で、挟角が小さく、精確な値が得られなかったからである。こうして 20 年間の 8 データを選び、それに楕円軌道を当てはめたのが図中の曲線である。

ここでは楕円軌道の極座標表現である

$$r = a(1-e^2)/(1+e\cos(\theta-\theta_0)) \qquad (5)$$

を採用し、最小二乗法で 3 パラメータ（軌道長半径 a、離心率 e、近点離角 θ_0）を決めた。$e = 0.025$、$\theta_0 = 61.2°$ となった。a は相対距離なので要注意である。なお、理科年表（2019）では、離心率 e = 0.0167、近日点黄経＝103.002°となっていて、離心率はまずまずとして、近日点黄経が大きく違っている。データの欠落が効いているのであろう。一つの衝の系列だけではこうなるから、別の系列で補う必要がありそうだ。地球軌道を決めるのは難しい。

表 2-1　地球軌道決定に使う日付

周回	Y	M	D	FJD
衝	2018	7	28	2458327.13
1	2020	6	14	2459014.13
2	2022	5	2	2459701.13
3	2024	3	19	2460388.13
4	2026	2	4	2461075.13
5	2027	12	23	2461762.13
6	2029	11	9	2462449.13
7	2031	9	27	2463136.13
8	2033	8	14	2463823.13
9	2035	7	2	2464510.13
10	2037	5	19	2465197.13

表 2-2　太陽・地球間の相対距離

周回	火星	火星	太陽	太陽距離
	l	β	ls	a
衝	304.0	-6.48	124.5	**
1	350.9	-2.68	83.0	0.730
2	342.4	-1.53	41.2	0.726
3	326.6	-1.16	358.5	0.725
4	308.7	-1.05	314.7	0.788
5	290.6	-1.09	270.5	0.677
6	273.4	-1.33	226.4	0.696
7	260.3	-2.03	183.3	0.708
8	270.7	-4.83	141.1	0.712
9	346.7	-3.86	99.6	0.736
10	347.6	-1.82	58.01	0.732

また、2 次元平面とみなし正弦定理を利用して対角・対辺を求める近似的な方法を試みたところ、$e = 0.014$、$\theta_0 = 90.1°$ となった。こちらが理科年表に近いのは皮肉なことである。

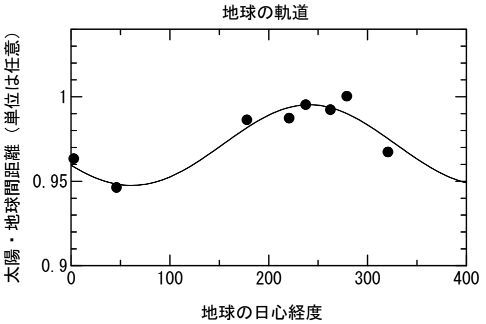

図 3　求められた地球軌道

8. 火星軌道決定

2018 年 1 月 1 日 T1 とその 1 公転後の 2019 年 11 月 19 日 T2 のデータを組みとし、紹介した方法で火星位置を求めた。これを 1 公転分 1.88 年間のデータで行った。

このようにして得られた火星位置は黄道面を基準とした座標系でとっているので、上で紹介した地球のようにそのままで形を論議するのは不適切であり、これを火星軌道面上の位置へと変換しなければならない。軌道が傾斜しているからである。そこで、交点線を軸に傾斜分だけ座標回転させることにする。そのためにはまず春分点方向から 49° ずれている交点線を春分点方向の x 軸に向け（z 軸で回転）、軌道傾斜角の 1.82°だけ x 軸で回転させて傾いている z 軸を合わせる。

z 軸を軸に ω だけ時計回りに回転させる座標回転のオペレータを $Z(-\omega)$と書いて行列形式で表示すると、

$$Z(-\omega) = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、X軸を i だけ時計回りに回転させて軌道面を黄道面に一致させるには次の操作を行えば良い。

$$X(-i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}$$

すなわち、黄道面上での座標を（x_0, y_0, z_0）とし、火星軌道面上に変換された座標を（x_c, y_c, z_c）とすると

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = X(-i)Z(-\omega)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

という計算から求める。$\omega = -49.26°$、$i = 1.82°$ である。

火星の場合は傾斜角が小さいから、こんな面倒をせずに近似的に平面としてやれば良いのだが、・・・

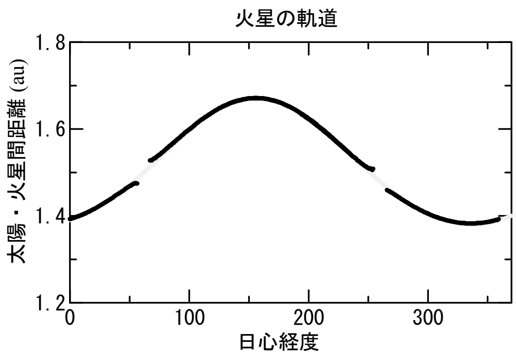

図 4　求められた火星軌道

得られた火星軌道は図 4 の通りである。毎日のデータがあるので密になっている。欠落部分は地球の場合と同様に、うまく求められない角度領域である。最小二乗法によるフィッティングの結果を先の要素と合わせて表 3 に掲げておく。

表 3　火星の軌道要素

要素	ここでの結果	理科年表
軌道半径	1.53 au	1.5237 au
離心率	0.10	0.0934
軌道傾斜	1.82°	1.848°
近日点黄経	336.6°	336.148°
昇交点黄経	49.3°	49.499°

理科年表（2019）の値も添えたが、ここでの結果は理科年表の値を完全に再現していると言って良かろう。なお、地球軌道の長半径が 1 au とわかっているという前提である。

9. おわりに

チィコの観測データを渡されて火星軌道を求めよと言われたら自分ならどうしようか、と考えてみて全くの無手勝流で追究してみた。使った方法は極座標表示や座標移動、三角関数の加法定理に基づく座標回転法などで、高校数学の内容だから高校や大学での教材として不適切ということはなかろう。楕円の極座標表示も高校数学Ⅲの教材となっている。楕円への最小二乗法によるフィッティングを行ったが、これは少々余計なことで、円に当てはめるのは難しいことや、無理やり円に当てはめてみると中心がずれることなどがわれば、むしろケプラーの問題意識により迫れるだろうし、楕円に行きつくまでの苦労も良くわかるというものである。

我々は答えを知っているので、安心して計算を進めることができた。暦作成コードや表データ処理ソフトの助けも借りて行ったが、それでも結構な時間がかかったから、暗中模索で進めていたケプラーがどれだけ苦心惨憺したか、まずまずの追体験ができたように思う。

最近、ケプラーの著書の邦訳が揃い、ケプラーの試行過程が詳しく紹介されるようになった[4] [5] [6]。とは言え、邦訳でも十分に難しく、読み下すだけでも大変な作業だろうと思う（やっていないが、ざっと見てそう思う）。この難しい翻訳を中心的に担われた岸本良彦氏にはただただ頭が下がるばかりである。また、ケプラーの科学史上の意義については山本[7]が詳しく、教えられるところが多い。当時の知識、情報の中でケプラーがどれだけ深い考察を行っていたか、十分に伝わってくる労作であり、一読をお薦めする。

文　献

[1] K.Y :（発行年不明）
http://user.keio.ac.jp/~earth/ssh/jpn/pdf/h1722.pdf
[2] 濱口敦、大隅秀晃、角縁進、髙島千鶴、中村聡（2014）佐賀大学教育実践研究, 32 : 59
[3] Van Flandern, T. C., & Pulkkinen, K. F.（1979）, *ApJS*, 41 : 391.
[4] ヨハネス・ケプラー（1596）『宇宙の神秘』（大槻真一郎、岸本良彦訳）、工作舎（1982）
[5] ヨハネス・ケプラー（1609）『新天文学』（岸本良彦訳）、工作舎（2013）
[6] ヨハネス・ケプラー（1619）『宇宙の調和』（岸本良彦訳）、工作舎（2009）
[7] 山本義隆（2014）『世界の見方の転換』第 3 巻，みすず書房

加藤 賢一