

投稿

チチウス・ボーデの法則とその修正型

～The Titius-Bode law and its revised version～

表 正彦

1. 序

堀源一郎先生にはチチウス・ボーデの法則の力学的意義を述べた論文[1]があり、石坂千春先生には天体軌道の“べき乗則”について述べた論文[2]があります。先頃、これらの論文を読んで大いに感心し、惑星の距離に関する諸法則を確認しました。そうしたうえで、新しい数式を複数個、作りました。その数式を吟味していただけるなら幸いです。

2. チチウス・ボーデの法則

2.1 チチウス・ボーデの法則の救済法

18 世紀に J・チチウスによって発見され、J・ボーデによって広められた「チチウス・ボーデの法則」（以後、「TB 則」と記します）は、惑星の軌道長半径を a 、太陽からの惑星の順番を n とするなら、次の数式で表されます。

$$a = 0.4 + 0.3 \times 2^n \quad (1)$$

なお、 n は $-\infty$ から始まり、0, 1, 2, 3, 4…と変化します。

TB 則は準惑星ケレスと天王星の存在を预言したために知名度がかなり高いのですが、天文学界における評価はそれほど高くないようです。「数字の遊びだ」「単なる経験則だ」「力学的な根拠がない」「偶然の産物だ」そういった声さえ聞かれます。

このような評価をくつがえすためには何をすべきでしょうか？

私は四つの方法を考えました。それは、軌道長半径の観測値と TB 則の計算値を比較し、一致の割合を示す。TB 則の数値を変えることで精度を高める。③精度を高めた TB

則を用いて太陽系新天体の軌道長半径と公転周期を予測する。④TB 則を衛星系に当てはめることで統計学的な件数を増やす。以上です。

2.2 観測値との比較

まずは、TB 則の計算値と a の観測値（単位は AU。出典は[3][4]）を比較します。そして C 値（ a の観測値 / a の計算値）を出します。その結果を表 1 にまとめました。

ご覧のとおり、準惑星一ケレスと冥王星も惑星の仲間に入れています。

表 1 軌道長半径 (AU) の計算値と観測値

惑星	n	2^n	計算値	観測値	C 値
水星	$-\infty$	0	0.4	0.387	0.968
金星	0	1	0.7	0.723	1.033
地球	1	2	1.0	1.000	1.000
火星	2	4	1.6	1.524	0.953
ケレス	3	8	2.8	2.766	0.988
木星	4	16	5.2	5.203	1.001
土星	5	32	10.0	9.555	0.956
天王星	6	64	19.6	19.218	0.981
海王星				30.110	
冥王星	7	128	38.8	39.540	1.019

海王星が $n = 7$ に対応しない理由については石坂先生が論文[2]で、こう述べています。海王星の移動が完成する前に、なんらかの理由で惑星移動のプロセスが終了してしまったのではないかと。ひょっとしたら、天王星・冥王星の重力の影響で、 $6 < n < 7$ に対応する領域にとどまったのかもしれません。

さて C 値の平均を求めたところ、約 0.989 と出ました。誤差は約 1% です。偶然にしてはできすぎですが、惑星の数—サンプル数—が少ないため必然と言い切ることはできません。

私は C 値をもっと 1 に接近させるため、TB 則の数値を変更することにしました。

3. TB 則の修正

3.1 地球型と水星型

最初は骨格となる数式を用意します。

$$a = x + y \times 2^n \quad (2)$$

a は各惑星の軌道長半径 (AU)、n は惑星の番号、x と y は定数です。

さまざまな数字を x と y に入れ、観測値と比較し、C 値を見て数字の適否を判断します。そして最適と思われる数字を選出し、修正型を作ります。できあがった修正型は、

A. 地球型 TB 則

$$a = 0.412 + 0.294 \times 2^n \quad (3)$$

B. 水星型 TB 則

$$a = 0.387 + 0.299 \times 2^n \quad (4)$$

です。地球型は地球の C 値を、水星型は水星の C 値を 1 に接近させた型です。

各修正型の C 値とその平均値を表 2 にかかげます。平均値の誤差は 0.5% 以下です。

3.2 公転周期の法則

東京大学理学部の堀源一郎教授(1967 年当時)は論文[1]で、ボーデやシュミットなどの惑星の距離法則を紹介した後、これらの法則は「平均運動の尽数関係の頻度という立場からみると乱数表以上の意味がない」と、述べています。しかしその一方で、「明らかに現実の太陽系で尽数関係が好まれている」、「どのような力学的淘汰で尽数関係優先の配置となったか……これはもっとも興味をそそる問題であるが今のところ知るよしもない」と、述べています。

表 2 修正 TB 則の C 値

惑星	n	地球型	水星型
水星	-∞	0.939	1.000
金星	0	1.024	1.054
地球	1	1.000	1.015
火星	2	0.960	0.963
ケレス	3	1.001	0.995
木星	4	1.017	1.006
土星	5	0.973	0.960
天王星	6	0.999	0.984
海王星			
冥王星	7	1.039	1.023
平均値		0.995	1.000

尽数関係というのは天体の自転周期や公転周期が簡単な整数比になっていることを言います。この関係を統一的に説明することはできないでしょうか。

ケプラーの調和の法則(第 3 法則。以下、調和則と記します)によれば、惑星の公転周期 P の 2 乗は軌道長半径 a の 3 乗に比例します。そして軌道長半径 a の単位を AU、軌道周期の単位を年、太陽と惑星の質量和を太陽質量とした場合、「 $P^2 = a^3$ 」となります。TB 則を代入した調和則においても、この関係は成り立ちます。それゆえ、TB 則的手法を使えば公転周期に関する新しい数式を見いだすことができるかもしれません。さっそく、挑戦してみます。

まず、チチウスの叡智に習い、各天体の公転周期(年)から水星の公転周期を引き、順に並べます。すると、「金星:地球:火星≒1:2:4」「天王星:海王星 1:2」という関係が現れます。そこで、公比 2 の等比数列を用意し、初項を 0.374 とします(この数字は金星の公転周期 0.615 から水星の公転周期 0.241 を引いた数です)。その数列の頭の部分に水星の公転周期を置くと、こうなります。

$$P = 0.241 + 0.374 \times 2^m \quad (5)$$

これを「P 適用型 TB 則」と呼ぶことにし、 m に $-\infty$ と整数を入れ、P の計算値を出します。さらにその計算値に最も近い P の観測値を選びだし、横に並べます[3][4][5]。そして対応する天体を決定し、C 値 (P の観測値 / P の計算値) を出します。それをまとめたものが表 3 です。

なお、惑星に当てはまる m は TB 則の n とは異なっています。ヒギエアは小惑星帯にある大きな球状の小惑星です (将来、準惑星に分類される可能性があると言われています)。キロンは周期彗星と小惑星の両方のリストに登録されている小天体です。

さて、P 適用型 TB 則の平均的 C 値は 1.075 でした。修正型として使うには不十分かもしれません。

表 3 P 適用型 TB 則

天体	m	計算値	観測値	C 値
水星	$-\infty$	0.241	0.241	1.000
金星	0	0.615	0.615	1.000
地球	1	0.989	1.000	1.011
火星	2	1.737	1.881	1.083
ケレス	3	3.233	4.60	1.423
ヒギエア	4	6.225	5.56	0.893
木星	5	12.209	11.862	0.972
土星	6	24.177	29.458	1.218
キロン	7	48.113	50.76	1.055
天王星	8	95.985	84.022	0.875
海王星			164.774	
冥王星	9	191.729	247.796	1.292

3.3 TB 則とその修正型の役割

TB 則は今後も予測値として使える、と私は見えています。かつて TB 則はケレスと天王星の存在を予言し、その発見に大いに貢献し

ました。これから先も太陽系新天体の発見に貢献できるのではないのでしょうか。

私は太陽から 76~78AU 離れた領域で第 8 星 ($n = 8$ に対応する太陽系天体) が見つかる可能性があると思っています。また、半径 130~160AU の太陽系圏界面で第 9 星 ($n = 9$ に対応する太陽系天体) が見つかる可能性があると思っています。というのは、TB 則とその修正型が、軌道長半径 76~78AU の天体と 151~154AU の天体を予測しているからです。具体的な内容については表 4 にまとめました。

なお、軌道長半径 a の単位は AU で、公転周期 P の単位は太陽年です。公転周期の予測値は「 $P = \sqrt{a^3}$ 」で求めています。

表 4 TB 則とその修正型の予測値

惑星		TB 則	地球型	水星型
第 8 星	A	77.20	76.18	77.05
	P	678.31	664.96	676.33
第 9 星	a	154.00	151.96	153.37
	P	1911.09	1873.24	1899.37

ところで、神戸大学大学院の向井正教授は、2008 年 2 月に次のような発表をしています。2013~2018 年に、「惑星 X (地球ほどの大きさの新惑星)」が軌道長半径 100~175AU の領域で発見される可能性が非常に高い、と。そしてその惑星は一個とは限らない、と[6]。

「惑星 X」の軌道長半径の領域は「第 9 星」の軌道長半径の領域をふくんでいます。それゆえ、「惑星 X = 第 9 星」となる可能性もあります。

「惑星 X = 第 9 星」発見の朗報。それを私は待ち望んでいます。なぜなら TB 則とその修正型の証明にもつながるからです。

4. 木星衛星系の法則

4.1 軌道長半径の法則

木星の全衛星（66 余）は万有引力の法則と調和則にしたがって動いています。しかし、それ以外の法則にもしたがっているようです。

素粒子原子核研究所の上原貞治先生は、木星の衛星でも TB 則的關係が成立する、と説き、次のような数式を提示しました[7]。

$$a = 2.52 + 3.43 \times 2^n \quad (6)$$

ここで、 a は木星の衛星の軌道長半径。 n は木星の 5 衛星の番号です。

この数式の計算値と a の観測値（単位は「木星の赤道半径」[3]）を比べ、 C 値を出すと、表 5 のようになります。

表 5 木星 5 衛星の軌道長半径

衛星	n	計算値	観測値	C 値
アマルテア	$-\infty$	2.52	2.53	1.004
イオ	0	5.95	5.91	0.993
エウロパ	1	9.38	9.40	1.002
ガニメデ	2	16.24	14.99	0.923
カリスト	3	29.96	26.36	0.880

ここで平均的 C 値を求めると、0.9604 と出ます。誤差は約 4%です。

上原先生の数式は美しいのですが、欠点があります。欠点のその 1 は木星の衛星を 5 つにしぼっているという点。欠点のその 2 は平均値がやや低いという点です。

僭越ながら私は式(6)の改善をこころみ、次の数式を見つけました。

$$a = 2.53 + 3 \times 2^n \quad (7)$$

そして、これに「アマルテア型」という名前をつけました。アマルテアの C 値を 1 に近づけた型だからです。

式(7)を用いた軌道長半径の計算値と実際の観測値、それから C 値を表 6 にかかげます。観測値の単位は木星の赤道半径です[3][8]。

n の 6~7 に対応する領域には衛星の「群」

が集中しています。その理由を石坂先生は、こう述べています[2]。衛星系で「群」がべき乗則からずれているのも、これらの群がその場で形成されたのではなく、惑星によって捕獲されたものだとすると説明できるだろう、と。

この説は、たいへん優れた見解だと思います。捕獲された小天体が砕けて散らばった可能性もある、と私は思います。

表 6 アマルテア型の軌道長半径

衛星	n	計算値	観測値	C 値
アマルテア	$-\infty$	2.53	2.53	1.00
イオ	0	5.53	5.91	1.069
エウロパ	1	8.53	9.40	1.102
ガニメデ	2	14.53	14.99	1.032
カリスト	3	26.53	26.36	0.944
未発見	4	50.53	無	無
テミスト	5	98.53	103.39	1.049
ヒマリア	6	194.53	160.7	0.826
カルポ			239.817	
アナンケ			297.0	
パンフィアエ			329.3	
S/2003 J2	7	386.53	423.7	1.096

衛星の平均的 C 値を求めると、約 1.015 と出ます。約 1.5%の誤差なので、式(6)より精度があがっていると言えます。

4.2 公転周期の法則

木星の衛星イオ、エウロパ、ガニメデの公転周期の比は 1 : 2 : 4 です。これらの衛星には、それぞれの平均運動を n_1 、 n_2 、 n_3 とするとき、「 $n_1 - 3 \times n_2 + 2 \times n_3 = 0$ 」という関係があります。木星の近方衛星群（上記の 3 衛星にカリスト、アマルテアを加えた衛星群）には「自転周期：公転周期 = 1 : 1」という関係もあります。

なぜこのような尽数関係があるのでしょうか。長い時間の運動が動体のブレをなくす方向に作用するとも言われていますが、詳しいことは分かっていません。

さて、フロリダ大学天文学部のスタンリー・F・ダーモット教授は、木星の衛星でもTB 則的關係が成立すると説き、次のような数式を提示しました[9]。

$$P = 0.444 \times 2.03^n \quad (8)$$

ここで、P は衛星の公転周期（単位は「日」[3][8]）、n は衛星の番号です。

この数式は「ダーモットの木星系の法則」と呼ばれています（以後、木星系則と記します）。木星系則を用いた P の計算値と P の観測値を並べ、C 値を出すと、表 7 のようになります。

もっとも、ダーモットの法則の n は 1 から始まっています。n=0, 1, 2...11 に対応する衛星名は私が推測して並べたものですので、ご注意ください。

表 7 木星系則における公転周期

衛星	n	計算値	観測値	C 値
アマルテア	0	0.444	0.498	1.122
テーベ	1	0.901	0.675	0.749
イオ	2	1.830	1.769	0.967
エウロパ	3	3.714	3.551	0.956
ガニメデ	4	7.540	7.155	0.949
カリスト	5	15.306	16.689	1.090
無	6	31.071	無	無
無	7	63.075	無	無
テミスト	8	128.04	129.828	1.014
エララ	9	259.92	257.985	0.993
S/2003J12	10	527.65	482.691	0.915
S/2003J2	11	1071.12	1077.018	1.006

木星系則の平均的 C 値を求めると、約 0.976 と出ます。誤差は約 2.4%。ガリレオ衛

星 (n=2, 3, 4, 5) の平均的 C 値が約 0.991 なので、それよりもやや劣ります。

ところで、石坂先生は論文[2]で、「木星系の衛星の公転周期が 2^n に比例すること」を明らかにしたうえで、このことは「イオ：エウロパ：ガニメデが 1：2：4 の尽数関係になっていることと整合する」と、述べています。

これは鋭い指摘だと思います。

私は木星系則の「 2.03^n 」は「 2^n 」とした方が良い（整合性がある）と考え、式(8)の変更をこころみ、次の式を見いだしました。

$$P = 0.4444 \times 2^n \quad (9)$$

これには、「木星系類似則」という名前をつけました。木星系則とほとんど変わらないからです。

木星系類似則の P と C 値については表 8 をご覧ください。

選出した 10 衛星は、P の計算値に最も観測値に近い衛星です。表 7 の衛星とは最後の三つが違います。

木星系類似則の平均的 C 値は約 1.012 です。約 1%の誤差。ガリレオ衛星のみを対象とした木星系則とほぼ同じ誤差です。

表 8 木星系類似則における公転周期

衛星	n	計算値	観測値	C 値
アマルテア	0	0.4444	0.4982	1.121
テーベ	1	0.8888	0.6745	0.759
イオ	2	1.7776	1.7691	0.995
エウロパ	3	3.5552	3.5512	0.999
ガニメデ	4	7.1104	7.1546	1.006
カリスト	5	14.2208	16.6890	1.174
無	6	28.4416	無	無
無	7	56.8832	無	無
テミスト	8	113.7664	129.8276	1.141
レダ	9	227.5328	238.8242	1.050
カルポ	10	455.0656	458.6248	1.008
メガクリテ	11	910.1312	792.4369	0.871

5. 土星衛星系・天王星衛星系の法則

5.1 軌道長半径の法則

土星衛星系および天王星衛星系の軌道長半径はチチウスの方法を用いれば良い数値が得られます。その方法は、①質量が大きい衛星を選択する。②式(2)の x には第 1 衛星の軌道長半径を用い、 y には第 1 衛星と第 2 衛星の軌道長半径の差を用いる、というものです。第 1 衛星は「母天体に最も近い衛星」または「母天体に最も近い衛星群のうち最大の衛星」です。

上記の方法で見いだすことができた「土星衛星系の軌道長半径の法則」は、

$$a = 3.09 + 0.88 \times 2^n \quad (10)$$

です。軌道長半径の計算値・観測値・C 値を表 9 にまとめましたので、ご覧ください。

選択した 8 衛星は質量が 1×10^{-8} 土星質量以上の衛星です。a の単位は土星の赤道半径 [3][8] です。

平均的 C 値を求めたところ、0.976 と出ました。約 2.4% の誤差です。

表 9 土星衛星系の軌道長半径

衛星	n	計算値	観測値	C 値
ミマス	$-\infty$	3.09	3.09	1.00
エンケラドス	0	3.97	3.97	1.00
テチス	1	4.85	4.91	1.012
ディオネ	2	6.61	6.29	0.952
レア	3	10.13	8.78	0.867
タイタン	4	17.17	20.36	1.186
ヒペリオン	5	31.25	24.68	0.790
イアペトス	6	59.41	59.34	0.999

次に見いだしたのは、「天王星衛星系の軌道長半径の法則」です。それは、

$$a = 3.37 + 1.76 \times 2^n \quad (11)$$

という数式です (表 10)。

選択した 7 衛星は質量が 0.03×10^{-6} 天王星

質量以上の衛星です。a の単位は天王星の赤道半径 [3][8] です。

平均的 C 値を求めたところ、0.98 と出ました。約 2% の誤差です。

表 10 天王星衛星系の軌道長半径

衛星	n	計算値	観測値	C 値
バック	$-\infty$	3.37	3.37	1.00
ミランダ	0	5.13	5.13	1.00
アリエル	1	6.89	7.54	1.09
ウンブリエル	2	10.41	10.5	1.01
チタニア	3	17.45	17.2	0.99
オベロン	4	31.53	23.0	0.73
シコラクス	8	453.93	476.51	1.05

5.2 公転周期の法則

土星衛星系・天王星衛星系の公転周期については、ダーモット教授が以下の数式を提示しています [9]。

$$\text{土星衛星系: } P = 0.462 \times 1.59^n \quad (12)$$

$$\text{天王星衛星系: } P = 0.488 \times 2.24^n \quad (13)$$

今回、これらの数式の変更も試みました。1.59ⁿ や 2.24ⁿ を 2ⁿ にすることで、統一性を持たせようとしたのです。しかし、ダーモットの法則より誤差が小さいものは作れませんでした。

6. 跋

6.1 まとめ

太陽系天体の軌道長半径には規則性があります。それを一般式にすると、次のようになります。

$$A_n = A_1 + (A_2 - A_1) \times 2^n \quad (14)$$

式(14)の n は伴星の番号で、 $-\infty, 0, 1, 2, 3 \dots$ と変化します。A₁ は第 1 星 (主星に最も近い伴星。または、主星に最も近い伴星群のうち最大の星) の軌道長半径で、A₂ は第 2 星 (第 1 星の次に主星に近い星。または、第

1 伴星群の次に主星に近い星) の軌道長半径です。伴星には惑星と衛星の 2 種類がありますが、惑星の単位は AU で、衛星の単位は主星の赤道半径です。

太陽系惑星の距離は「 $An=0.387+0.299 \times 2^n$ 」、木星衛星系の距離は「 $An=2.53+3 \times 2^n$ 」、土星衛星系の距離は「 $An=3.09+0.88 \times 2^n$ 」、天王星衛星系の距離は「 $An=3.37+1.76 \times 2^n$ 」という数式で、それぞれ表すことができます。これらの数式の誤差は約 0~2.4%です。

6.2 課題と期待

石坂先生は論文[2]で、こう述べています。ケプラーの第 3 法則を思い出せば、「軌道長半径のべき乗則を、公転周期のべき乗則に変換することができる」、「ボーデ則と尽数関係とは関係ないだろうという当初の予想に反し、「新しいボーデ則 (べき乗則)」は天体同士の尽数関係と関連があったのである」と。

私はこの主張に感銘を受け、調和則を駆使することで TB 則と尽数関係のつながりを明らかにしたいと考えました。しかし、うまく表現できませんでした。そのことを告白するとともに、今後の課題とさせていただきます。

さて、元国立天文台長の観山正見先生は、国立天文台では重力専用計算機を使用して「微惑星の成長シミュレーション」を作成中である、と述べたうえで、TB 則に関する小久保英一郎・国立天文台教授の予想を紹介しています。それは、「惑星が十分成長した後には、それぞれの支配領域を作って、互いに近づくことを牽制するのではないか」というものです[10]。

今後、発表される「微惑星の成長シミュレーション」とその解析は TB 則と尽数関係のつながりを明らかにしてくれるかもしれません。私はそうあってほしいと思いながら、夜空の寂しげな美しい星々を眺めています。

文 献

- [1] 堀源一郎 (1967)『ボーデの法則の力学的意義』, 天文月報 1967 年 9 月号.
- [2] 石坂千春 (2012)『天体の軌道に関する“べき乗則”について』大阪市立科学館研究報告.
- [3] 国立天文台 (2013)「理科年表」, 丸善出版.
- [4] 水谷仁 (2006)『Newton 別冊 太陽と惑星』, ニュートンプレス.
- [5] 「冥王星-Wikipedia」, 「ケレス (準惑星) - Wikipedia」, 「ヒギエア (小惑星) - Wikipedia」, 「キロン (小惑星) - Wikipedia」.
- [6] 向井正, P・S・リカフィカ (2008)『太陽系に未知の「惑星 X」が存在する!』, 講談社.
- [7] 上原貞治 (2009)『「ボーデの法則」とその見直しについて II』, 銀河鉄道 WWW 版 第 31 号.
- [8] 「木星の衛星と環-Wikipedia」, 「土星の衛星と環-Wikipedia」, 「天王星の衛星と環-Wikipedia」.
注: 各資料の軌道長半径の単位「km」を「母天体の赤道半径」に換えています. [3]の単位に合わせたためです.
- [9] S. F. Dermott (1968~1969)『太陽系における尽数関係の起源 II・III』, “Dermott's law-Wikipedia”.
- [10] 観山正見 (2002)『太陽系外惑星に生命を探せ』, 光文社.

表 正彦