投稿

「潮汐力」のわかりやすい説明

槙野文命（宇宙科学研究所名誉教授）

1. はじめに

大学での天文学の「潮汐力」に関する講義で、立ち往生して以来、わかりやすい説明を考えていたが、正しい理解が世間に浸透していないのではないかと思われ、改めて、まとめた次第である。潮汐力を、地球上に拘束された質点に働く力で説明するモデルは、力学の初等的な問題であるにも関わらず、予習をしていない教師が絶句したり、初学者が騒ぐのは、1)月の重力が原因だというが、月と反対側でも同時に満潮になること、2)その現象は、地球の両端の月の重力の差で説明できるが、その際、地球の両端（図1の A_1 と B_1）に発生する遠心力が等しくなければならない、という点である。1)は 2)によって解決されるので、2)だけが問題である。

誤解を生む原因は、このモデルが、質点の拘束運動（付録2参照）であることに、気がついていないことではないかと思われる。

2. 運動方程式を用いない方法

潮の干満を引き起こす力、潮汐力は、月および太陽の地球に及ぼす重力が原因であるが、月のみとして説明する。

月と地球の重心間の距離を R、地球の半径を r とする。簡単のために、R>>r とし、r/R の一次近似を用いて説明する。月の重心を Q として、QC_1 の距離 L は、

$$L=\sqrt{R^2+2Rr\cos\theta+r^2} \qquad (1)$$

で与えられる。θ は、図1に示すように、C_1 の位置を表す角度である。地球に固定されているテスト物体 C の質量を 1kg として、C に働く月の重力 F_G は、重力定数を G、月の質量を M とすれば、(2)式のように表せる。

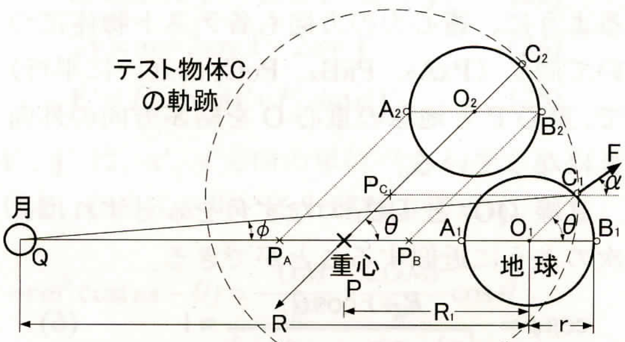

図1　月と地球、テスト物体 C（C_1, C_2）

$$F_G=-\frac{GM}{R^2+2Rr\cos\theta+r^2}$$
$$\approx-\frac{GM}{R^2}+\frac{2GMr}{R^3}\cos\theta \qquad (2)$$

地球は自転していないとしておく。地球が月とのケプラー運動で、角度 θ だけ回転（任意の角度でよいが、P_C の位置が分かりやすいので、θ とする）したとすれば、地球に固定された 1kg のテスト物体 A、B、C、O は、それぞれ、A_1、B_1、C_1 および地球の重心 O_1 の位置から、A_2、B_2、C_2、O_2 へ移動する。各テスト物体の軌跡を画いてみればわかるように((33)式参照)、各回転中心 P_A、P_B、P_C および月と地球系の重心 P（実際には地球の中にある）は、慣性系の固定点で、円運動の半径は同じ（$=R_1$）で、角速度も同じ（$=\omega$）である。例として示した C の軌跡について、C に働く遠心力 F_C を求める。重心 P の周りの地球の回転の角速度 ω は、O_1 での O に働く遠心力と月の重力のつり合いから、

$$R_1\omega^2=\frac{GM}{R^2} \quad (3), \qquad \omega^2=\frac{GM}{R_1R^2} \quad (4)$$

となる。$R_1=PO_1=PO_2=P_CC_1=P_CC_2$ である。

$$F_C = R_1\omega^2 = R_1\frac{GM}{R_1R^2} = \frac{GM}{R^2} \qquad (5)$$

すべて同じ円運動をしているので、O の遠心力に等しく、(3)式で、すでに求められているが、話の筋道として示した。図 1 からわかるように、遠心力の方向も各テスト物体について同じ（P_AA_2、P_BB_2、P_CC_2 は互いに平行）で、重心 P と地球の重心 O を結ぶ方向の外向きになっている。

直線 QO_1 と QC_1 のなす角を ϕ とすれば、次のように近似することができる。

$$\cos\phi = \frac{R + r\cos\theta}{\sqrt{R^2 + 2Rr\cos\theta + r^2}} \approx 1 \qquad (6)$$

$$\sin\phi = \frac{r\sin\theta}{\sqrt{R^2 + 2Rr\cos\theta + r^2}} \approx \frac{r\sin\theta}{R} \qquad (7)$$

C_1 に働く力の QO_1 方向の成分 F_1 とこれに垂直な成分 F_2 は、それぞれ、(8)、(9)式のようになる。

$$F_1 = F_G\cos\phi + F_C \approx \frac{2MGr}{R^3}\cos\theta \quad (8)$$

$$F_2 = F_G\sin\phi \approx -\frac{GMr}{R^3}\sin\theta \qquad (9)$$

従って、潮汐力の大きさ F とその方向 α（QO_1 と F のなす角）は

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \frac{GMr}{R^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1} \quad (10)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{F_2}{F_1} \approx -\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan\theta\right) \qquad (11)$$

となり、これを図 2 に示す。

このような力により、水平方向には張力が働き、垂直方向には圧縮力が働くことがわかる。月を結ぶ直線上の海水は両側に膨れ上がり、地球が弾性体であれば、楕円体状に変形することになる。

C の円運動の中心が P ではなく、P_C であることが、誤解の原因であることがわかる。C の運動は、この円周上に拘束されている拘束運動である。

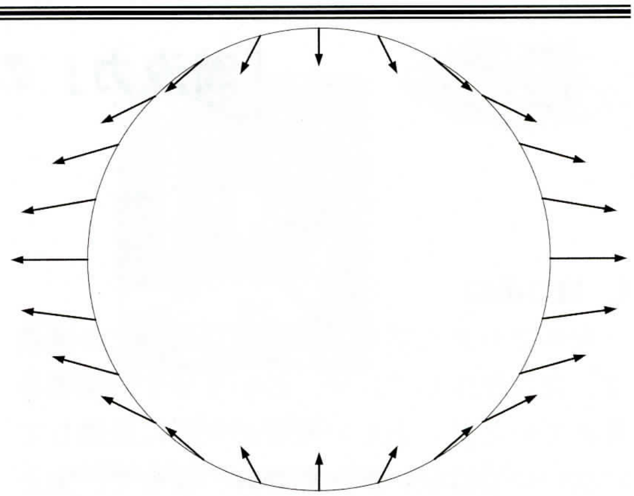

図 2 潮汐力の地球表面での力の分布
（矢印の長さは潮汐力 F の相対値）

4. 慣性系の運動方程式

テスト物体 C は 1kg で、地球に固定されている。拘束運動の方程式は、ベクトル表示で次のようになる。

$$\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{K} \qquad (12)$$

a：テスト物体の加速度、**F**：テスト物体に対する作用力（外力）、**K**：テスト物体の運動を拘束する拘束力で、C に働く潮汐力は、拘束力の反作用として求めることができる。**a** は(31)、(32)式の両辺の 2 階微分から、**F** は(2)式の F_G と角度 ϕ およびこれが角速度 ω で回転していることから、次のようになる。

$$\mathbf{a} = -R_1\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i} - R_1\omega^2\sin\omega t\,\mathbf{j} \qquad (13)$$

$$\mathbf{F} = F_G\cos(\omega t + \phi)\mathbf{i} + F_G\sin(\omega t + \phi)\mathbf{j} \quad (14)$$

i, **j** は、それぞれ、x, y 方向の単位ベクトルである。x, y 方向の運動方程式は、(2)、(6)、(7)式と r/R の一次近似から次式のようになる。

$$-R_1\omega^2\cos\omega t = \left(-\frac{GM}{R^2} + \frac{2GMr}{R^3}\cos\theta\right)\cos\omega t + \frac{GMr}{R^3}\sin\theta\sin\omega t + K_x \quad (15)$$

$$-R_1\omega^2\sin\omega t = \left(-\frac{GM}{R^2} + \frac{2GMr}{R^3}\cos\theta\right)\sin\omega t - \frac{GMr}{R^3}\sin\theta\cos\omega t + K_y \quad (16)$$

K の x、y 成分 K_x、K_y は、(15)、(16)式の左辺と右辺かっこ内の第 1 項が打ち消し合うこと （(3)式より）から、次のようになる。

$$K_x = \frac{GMr}{R^3}(-2\cos\theta\cos\omega t - \sin\theta\sin\omega t) \quad (17)$$

$$K_y = \frac{GMr}{R^3}(-2\cos\theta\sin\omega t + \sin\theta\cos\omega t) \quad (18)$$

上の式の符号を変えたものが、求める潮汐力であるが、これと(8)、(9)式が同じであることを示すためには、地球と共に回転する座標系に変換しなければならない。変換の式は(34)、(35)式のそれぞれ一行目の式で、x, y, x', y'の代わりに K_x, K_y, $K_{x'}$, $K_{y'}$とおけばよい。(17)、(18)式で、ωt＝0 としてもよい。

$$F_1 = -K_{x'} = \frac{2GMr}{R^3}\cos\theta \quad (19)$$

$$F_2 = -K_{y'} = -\frac{GMr}{R^3}\sin\theta \quad (20)$$

慣性系の運動方程式では、外力である月の重力が回転するために、潮汐力も回転している力となる。慣性系の解ではあるが、回転座標系に変換しなければ、結果の理解がむつかしい。

4. 回転系での運動方程式

この問題は、月と地球が静止して見える回転座標系（付録 1 参照）(x', y') を用いれば、簡単に解くことができる。回転系での運動方程式は、質量を 1kg として、ベクトル表示で、次のように表される。

$$\mathbf{a}' = \mathbf{F}' - \omega\times(\omega\times\mathbf{r}') + 2(\mathbf{v}'\times\omega) + \mathbf{K}' \quad (21)$$

a'：テスト物体の加速度、**F'**：テスト物体に働く外力、**ω**：角速度ベクトル、**r'**：テスト物体の位置ベクトル、**v'**：テスト物体の速度ベクトル、**K'**：地球の表面に拘束する力である。この問題に必要でない項は除いてある。右辺の第 2 項は遠心力、第 3 項はコリオリ力で、いずれも回転座標系の慣性力である。**a'** は、付録 1 の(34)、(35)式から、遠心力およびコリオリ力はそれぞれのベクトル積の演算から($\omega_x=\omega_y=0$、$\omega_z=\omega$)、以下のように求まる。**F'** は(2)式の F_G と角度 φ で与えられる。

$$\mathbf{a}' = -\omega^2 x'\mathbf{i}' + \omega^2 y'\mathbf{j}' \quad (22)$$

$$\omega\times(\omega\times\mathbf{r}') = -\omega^2 x'\mathbf{i}' - \omega^2 y'\mathbf{j}' \quad (23)$$

$$2\mathbf{v}'\times\omega = 2\omega v'_y\mathbf{i}' - 2\omega v'_x\mathbf{j}' \quad (24)$$

$$\mathbf{F}' = F_G\cos\phi\,\mathbf{i}' + F_G\sin\phi\,\mathbf{j}' \quad (25)$$

i'、**j'** は、x'、y'方向の単位ベクトルである。(34)、(35)式を用いると運動方程式は、

$$-r\omega^2\cos(\omega t-\theta) = -\frac{GM}{R^2} + \frac{2GMr}{R^3}\cos\theta + \omega^2\{R_1 + r\cos(\omega t-\theta)\} - 2r\omega^2\cos(\omega t-\theta) + K_{x'} \quad (26)$$

$$r\omega^2\sin(\omega t-\theta) = -\frac{GMr}{R^3}\sin\theta - r\omega^2\sin(\omega t-\theta) + 2r\omega^2\sin(\omega t-\theta) + K_{y'} \quad (27)$$

(26)式に(3)式を用いると、潮汐力 F_1、F_2 と拘束力 $K_{x'}$、$K_{y'}$は以下のようになる。

$$F_1 = -K_{x'} = \frac{2GMr}{R^3}\cos\theta \quad (28)$$

$$F_2 = -K_{y'} = -\frac{GMr}{R^3}\sin\theta \quad (29)$$

回転座標系の運動方程式に作用力（外力）を与えれば、機械的に結果を導くことができる。

5. 潮汐力の応用

(10)式から、月と太陽の地球に及ぼす潮汐力を比較することができる。月と太陽の M/R^3 の値はそれぞれ、1.29×10^{-3}kg/m^3、5.94×10^{-4}kg/m^3 となって、太陽の潮汐力が月の約 1/2 となる。月、地球、太陽が直線状に並んだ時には、その並び方によらず、大潮となる。地球を頂角にして、月、太陽が直角の位置にある時には小潮となることも図 2 から容易に理解できる。

潮汐力は、太陽と惑星、惑星と衛星、連星系で発生し、互いの天体を変形させ、自転周

期と公転周期が同じになる潮汐ロッキングや、木星の衛星イオが現在も高温を維持している潮汐加熱を起こさせる。

6. あとがき

教師も学生も、調べ物はインターネットである。潮汐力を検索してみると、多くは、以下のような説明になっている。地球の両端(図1の A_1、B_1) にある 1kg の物体に働く月の重力は, (30)式で表すことができる。

$$F_{G'} = -\frac{GM}{(R \pm r)^2} \approx -\frac{GM}{R^2} \pm \frac{GMr}{R^3} \qquad (30)$$

地球の重心 O に働く遠心力 GM/R^2 と(30)式の $-GM/R^2$ が打ち消し合って、両端に張力 $\pm 2GMr/R^3$ が現れる、となっている。この記述は正しく、なぜ、O 点の遠心力と A_1、B_1 の遠心力が同じかという説明が省略されているだけである (付録 1 参照)。しかし、この記述が誤解の発生源ではないかとも思われる。一般向けの解説では、正しいとわかっている事柄に詳しい説明をせず、直観的に理解できるような記述をすることは多い。インターネット情報は玉石混交であり、間違った情報や解釈が世間に出まわることは気をつけなければならない。潮汐力については、不可解な解説を目にすることがあり、インターネットの弊害ではないかと考えている。

本稿は、間違った情報を正すための教材として、お使い頂くことを目的に書いたものである。誤りがあれば、指摘して頂き、改訂してよい教材にしたいと考えている。老爺心から言えば、これは単純化したモデルであって、実際の潮汐現象とは異なることも強調して頂きたい。

謝辞

宇宙科学研究所名誉教授奥田治之氏、東京大学天文学教育センター助教半田利弘氏には、ご意見やご教示を頂いた。厚くお礼を申し上げます。

付録 1

図 1 の C の軌跡の方程式を示しておく。図 1 の重心 P を原点として、PO_1 の方向を x 軸、これに直角な方向を y 軸とする。C の位置(x, y)は、次の式で与えられる。

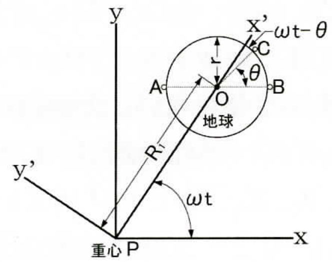

図 3　慣性系 (x, y) と回転系 (x', y')

$$x = R_1 \cos\omega t + r\cos\theta \qquad (31)$$

$$y = R_1 \sin\omega t + r\sin\theta \qquad (32)$$

(31)、(32)式から、ωt を消去すれば、

$$(x - r\cos\theta)^2 + (y - r\sin\theta)^2 = R_1^2 \qquad (33)$$

となり、慣性系の固定点(r cosθ、r sinθ) を回転中心にして、半径 R_1、角速度ωで、回転していることがわかる。(33)式の r を小さい値に変化させても、半径が R_1 と一定であることは、地球内部の全地点が同じ円運動をしていることになり、その遠心力が一定値 GM/R^2 であることを示している。

慣性系 (x, y) から、角速度ωで回転している座標系 (x', y') への変換は、次のように、(31)、(32)式の x, y を用いて行う。

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t$$
$$= R_1 + r\cos(\omega t - \theta) \qquad (34)$$

$$y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$
$$= -r\sin(\omega t - \theta) \qquad (35)$$

$$(x' - R_1)^2 + y'^2 = r^2 \qquad (36)$$

図 3 と(36)式からわかるように、回転座標系

では地球は、重心 P から R_1 だけ離れた x'軸上に静止し、その表面をテスト物体が角速度 ω で回転しているように見える。実際には R_1(〜4670km)<r (〜6380km)であるので、重心 P の位置は、地球の中にある。

付録 2

拘束運動について、説明しておく[1]。質点のとりうる位置、速度が制限されている運動を拘束運動と言い、このような運動を起こさせる作用力（外力）以外の力を拘束力または抗力と呼んでいる。これに対し、位置や速度に制限がない場合を自由運動と呼ぶ。

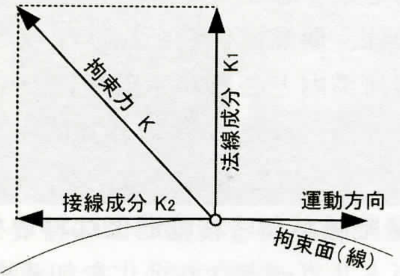

図 4　拘束力

拘束力 **K** を、運動の接線成分 K_1 と法線成分 K_2 に分解する。接線成分に相当する実際の力は摩擦力である。従って、摩擦がなければ、拘束力は法線成分のみとなる（$K=K_1$）。運動方程式は質量を 1kg として、ベクトル表示で、(12)式で与えられる。

$$\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{K} \quad (12)$$

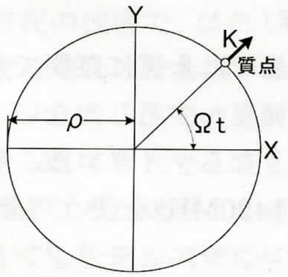

図 5　円周に拘束された質点の運動

簡単な例として、角速度 Ω で、半径 ρ の円周上に拘束されて運動をしている 1kg の質点を考える。摩擦がないとすれば、拘束力 **K** は半径方向に働くので、運動方程式と拘束条件は、

$$\ddot{x} = K\cos\Omega t, \quad \ddot{y} = K\sin\Omega t \quad (37)$$

$$x = \rho\cos\Omega t, \quad y = \rho\sin\Omega t \quad (38)$$

と与えられる。(38)式の 2 階微分と(37)式から、K が以下のように求まる。

$$-\rho\Omega^2\cos\Omega t = K\cos\Omega t \quad (39)$$

$$-\rho\Omega^2\sin\Omega t = K\sin\Omega t \quad (40)$$

$$K = -\rho\Omega^2 \quad (41)$$

拘束力は向心力で、絶対値は遠心力に等しいというよく知られた円運動に必要な力である。

以上のことから、自由運動として求められた質点の軌跡と作用力（外力）の関係は、拘束運動の拘束条件と拘束力の関係と同じであることがわかる。力を与えて、軌跡を求めるのか、拘束条件（軌跡）を与えて、力を求めるのかという違いだけであると考えてもよい。拘束運動の一般的な取り扱いは簡単ではないが、本稿の内容に限って言えば、与えられた軌跡の運動をする力を求める問題であることに気がつけばよいのであって、拘束運動を知っている必要はない。(12)、(21)式の **K**、**K'** を拘束力と呼ぶ必要はなく、単に、求めるべき未知の力を **K**、**K'** としたとすればよい。

[1]国井修二郎、千田香苗、力学 I, p217, 丸善 1955.