

投稿

恥ずかしながら縮退圧

～物理チャレンジ 2008 の見事な手さばき～

加藤賢一（大阪市立科学館）

1. はじめに

最近、チャンドラセカールの伝記[1]を読んで、「オレって、全く分かってないなあ。内部構造論は聞いたはずなんだけど」と、今更ながら不勉強だったことを思い知らされ、いささかがっかりした。それは白色矮星の話である。白色矮星は太陽と同程度の質量なのに半径は 100 分の 1 ほどで、電子の縮退圧というもので重力を支えている。しかし、チャンドラセカールの質量という太陽の 1.4 倍ほどの質量を越えると電子の縮退圧では耐えきれず、白色矮星は潰れてしまう。この理論を出した時、チャンドラの先生だったエディントンは「白色矮星は潰れないようにできている」と大反対し、両者は険悪な関係に陥った、という誠に小説的に面白い話が残っていて、今、読んでいるチャンドラの伝記でも前半のハイライトになっている。天文学的にはどうでもよい逸話ではあるが[2]。

2. 恥ずかしながら

さて、まず私の白色矮星理解がどの程度だったか、恥をしのんで披露しよう。

白色矮星とは炭素などの原子核がぎっしり詰まり、はじき出された電子が動き回っているような状態だから、鉄や銅の類推で考えれば良からう。電子はフェルミオンというやつで、同じエネルギーや運動量の電子は 2 つしかなく、最も大きな運動量にはフェルミ運動量という名前がついていて、

$$p_F = h(3\pi^2 N)^{1/3}/(2\pi) \quad \dots\dots\dots (1)$$

と表わされる（こんな難しい式を覚えていたわけではない）。そこで、電子の質量を m とすると、電子の速度 v_F は

$$v_F = p_F / m \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。ここで N は電子数密度である。白色矮星の質量、半径等のデータからこの N を見積もり、その値を(1)式に入れ、(2)式から速度 v_F を求めると光速度位になる。つまり白色矮星では電子が無茶苦茶な速度で動いているものだから圧力が発生し、重力を支えている（なるほど）。そこで、さらに重力が強くなり、速度 v_F が光速度を越えるほどに数密度が大きくなると、例の光速度を越えることはできないという限界にぶつかり、潰れてしまう（なるほど、なるほど！）。

ここで、電子の代わりに中性子とすると、質量が 2000 倍程度違うところだけが違って、後の扱いは同様に、 N が 10^{45} 位になって、半径を 5km ほどにとると太陽質量になる、ということで中性子星のまあまあの数字が出てくる。潰れるのも同様である。めでたし、めでたし！

ざっと、こんな何とも幼稚な理解で済ましていた。もっとも、40 年ほど前に話を聞いた時にはもっとちゃんとしていたはずだが、今や忘却の彼方である。「なあに、ものの本を見ればいいんだし」と。

さて、以上のように、結果がまあまあとすると、肝腎なのは(1)式である。「これって、どうやって出すの？」恥ずかしいのはここである。通勤電車の中で 2 日ほど格闘したが、

出ない！ 「フェルミオンだから、不確定性原理に従っている。これから導かれるはずだ」というのでちょちょやったものの「あれ？」という次第。これじゃあ、今は無き教養部さえ修了できない！

3. 物理チャレンジ 2008 の問題

修了試験にパスできそうになればカンニング、というわけでネットに答えが転がっていないか探してみたところ、「物理チャレンジ 2008」の理論問題にぶつかった[3]。ご存知の方が大半とは思いますが、ホームページの案内には

物理チャレンジは、大学等に入学する前の高校生・中学生の皆さんを主な対象として、物理の面白さと楽しさを体験してもらうことを目的とする全国規模のコンテストです。また、翌年に開催される国際物理オリンピック（International Physics Olympiad, IPhO）日本代表選考も兼ねています。

と書いてある。物理学会や物理教育学会の先生方が中心になって物理教育振興を図ろうと進めている運動体である。小学生！から高校生までオーケーらしい。

その 2008 年の理論問題の第 3 問が白色矮星に関連していて、私の疑問にずばり答えてくれるものだった。そして、この問題が実に素晴らしい！ 妙な予備知識なしでも、問題文に従って解答していけば位相空間、フェルミ統計、縮退、相対論的エネルギー表式、熱による仕事、重力エネルギーなどの概念が大雑把につかめ、最終的には、相対論的扱いをすると白色矮星の質量に上限がつくこと、そのチャンドラセカール質量が太陽の 1.7 倍ほどになること（近似的に扱っているのでこの数値）、同様の扱いで中性子星のサイズも求まることなどが導かれる。途中で使っている数

学は初歩の微積分だけだから、小賢しい知識やテクニックなど不要である。問題文のヒントに素直に従っていけば（つまり、予備知識不要）、重要な概念の本質に触れることができるという誠に素晴らしい問題であり、出題者の非凡さがいかんなく発揮されていた。たぶん、天文学をちゃんと分かっている人はこうした整理を自分でやって、しっかり概念把握をしているのだろうと思わせられ、改めて自分の不勉強を恥じたのであった。

「物理チャレンジ」のホームページ[3]に問題と回答が載っている。皆さんも一度この問題にトライしてみたいはいかが？ 半日、楽しむことと思う。

4. 内容の簡単なお案内

解答する喜びを阻害しない範囲で問題を紹介しておきたい。

くだんの第 3 問は問題用紙が 8 ページで、設問は 14 ある。まず、

- ・ 不思議な星—白色矮星の発見
- ・ 微視的世界の粒子の運動—ハイゼンベルグの不確定性原理
- ・ 位相空間という新しい座標系
- ・ 電子の縮退状態

以上の 4 項目を 2 ページで解説し、

問 1：空間座標 1 次元の場合のフェルミ運動量（与えてある）を求めるプロセスを問い、
問 2：位相空間内の横長の微小空間内にある全電子の運動エネルギーを、

そして、

問 3：問 2 の答えを積分して全位相空間内の全運動エネルギーを求めさせる。

ここまでで私の疑問はほぼ解けてしまったことになる（情けない！）。解説と問題文のヒントによって全く無理なく導くことができるのがすごい。このコンテストに出場した学生さんなら「馬鹿にするな」と言うかも知れないが。さて次に、

- ・電子の縮退圧

という解説がある。ここでは熱力学に登場する、(熱)エネルギー変化=圧力×体積変化、というおなじみの関係式から

縮退圧

=問3の全エネルギーの変化/体積変化であることを示し、

問4：電子の縮退圧と陽子の縮退圧を比較させる。

そして、

- ・相対論的または非相対論的な運動エネルギー

の解説を行い、

問5：粒子の運動エネルギーを相対論的または非相対論的な場合の近似的表現として、 $p^2/2m$ 、 pc となることを導かせる。

以上で1次元の話を終り、それを

- ・3次元空間での電子の縮退圧

に拡張し、

問6：空間3次元、運動量3次元の6次元位相空間内でのフェルミ運動量を求めさせる。

問7：問2にならい、位相空間内の微少領域内での運動エネルギーを求め、

問8：それを積分し、相対論的、非相対論的な場合についての全運動エネルギーを求め

る。
問8では問題中に最終的な解の形を示し、変数の冪数だけを答えさせる。このあたりの出題テクニックもにくだいほどだ。

そして、いよいよ本丸に迫る。

- ・太陽の未来
- ・星の重力エネルギー

の解説に半ページを費やし、重力を距離で積分したものと重力エネルギーを定義し、

問9：星内部の薄い球殻状領域の持つ重力エネルギーを求めさせ、

問10：それを積分して全重力エネルギーを得る。

次の

- ・星の進化

の解説では、星の全エネルギーは重力エネルギーと縮退圧による電子の運動エネルギーの和となることを述べ、収縮する星はこの全エネルギーが最小となったところで止まると結ぶ。エネルギーで議論を進めるところなどは、ハミルトニアンを用いる量子論での定式化を思わせるもので、これまた感心したのであった。

そして、

問11：白色矮星内部での密度は一様で、電子の振る舞いは非相対論的であると考えると、その半径と密度を求めよ、

と続ける。ここでは太陽が白色矮星になった時の具体的な値も算出させる。その後、相対論的な場合、全エネルギーが大きさに反比例することをヒントで示し、

問12：星がある質量を超えると潰れることを星の安定性から説明させ、

問13：その答えを数値計算し、チャンドラセカール質量を求めさせる。

これで一応終りで、最後、

- ・チャンドラセカール質量

の解説でチャンドラセカール質量の意味を示し、白色矮星がさらに収縮したら中性子星になることに触れ、最後の問題、

問14：中性子星の半径を求め、

- ・ブラックホール

の解説で締めくくる。

5. 天文教育界でも

見事としか言いようのない手さばきである。そう感じたのは不勉強な私だからとは思いうけれど、正直、脱帽であった。素晴らしい白色矮星調理マニュアルである。小骨はたくさんあろうけれど目をつぶり、大骨に食らいついて順にさばいていく。いつの間にやら白色矮

星はきれいに調理され、どれがトロで大骨か、一目瞭然、となる。それも普通の高校生の学力で調理できるようにお膳立てされている。出題者の腕前にただただ感心するばかりで、一度、チャンドラやオッペンハイマーに見てもらいたいと、叶わぬことを願ったほどだった。

私などはこの問題の程度で十二分なので、天文学のいろいろをこの調子で教えてもらえないものか、と思う。高校レベルでここまで解説できるのである。できれば、私もこの問題程度のことはそらでしゃべりたい。教えるのは商売のうちなので、本当はそんなことを言っている場合ではないが、こんな問題を作るどころか、正直、この程度も理解していなかったわけで、恥ずかしいけれど降参である。

この問題には、それ以外にも教えられるところがあった。われわれの分野でも、もっと教材の工夫ができるのではないか、ということである。こうした導出法・理解法を教えてもらったこともなければ（いや、あったかも知れないが）、自分で考えたこともなかった。経験不足の分野はうろ覚えだから、得てしてぼかして話をしてしまう。でも、このような工夫された教材が揃っていれば、門外漢でも短時間に本質を掴み取ることができる（高校レベルで！）。それこそ教育の専門家の出番であり、本誌への登場を期待したい。恥をしのんで記した所以である。

文 献

- [1] Miller, A. I. (2005) 『Empire of the Stars – Friendship, Obsession and Betrayal in the Quest for Black Holes -』, Abacus (London).
- [2] 白色矮星の天文学については、本誌の連載「星々の終末の姿」シリーズの論文がある。いずれも力作で、実に明解である。
- ・西村昌能 (2007) 天文教育 19(1 月)、2

- ・西村昌能 (2007) 天文教育 19(3 月)、18
 - ・岡崎彰 (2007) 天文教育 19(5 月)、2
 - ・内藤博之 (2007) 天文教育 19(7 月)、2
 - ・杉本大一郎 (2007) 天文教育 19(9 月)、27
 - ・定金晃三 (2007) 天文教育 19(11 月)、31
- [3] 詳しくは物理チャレンジの下記のホームページを参照されたい。

<http://www.phys-challenge.jp/>

加藤賢一



同じエネルギーを占めることができる電子は2つまで（パウリの排他律）。この性質が縮退圧を生む。
Wolfgang Ernst Pauli (1900–1958)



電子がたくさん集まったらどうなるか、この2人が定式化した。Enrico Fermi (1901–1954)、Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984)
ノーベル財団のホームページより
http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/