

## エポック I : 宇宙の誕生～宇宙開闢の物語（後編）

福江 純（大阪教育大学）

承前：宇宙誕生時の大事件、すなわち時空（宇宙）の誕生と、その後の時空相の変化について眺めていこう。

### 5. ビッグバン宇宙

現在、宇宙が膨張しているなら、過去の宇宙は現在よりも小さかったはずだ。そして、時計の針を逆回しにして過去に遡れば、宇宙はどんどん小さくなっていき、それとともに、

宇宙の体積も小さくなるので、物質・エネルギーの密度は大きくなるだろう。同じように、過去に遡るほど、物質や放射の温度も高くなるだろう。言い換えれば、宇宙は、きわめて高温高密度の火の玉状態からスタートして、膨張とともに希薄になり温度が下がって今日にいたったと考えられる。これが、ジョージ・ガモフが 1948 年に提案した「ビッグバン宇宙」の考え方だ（図 13）。

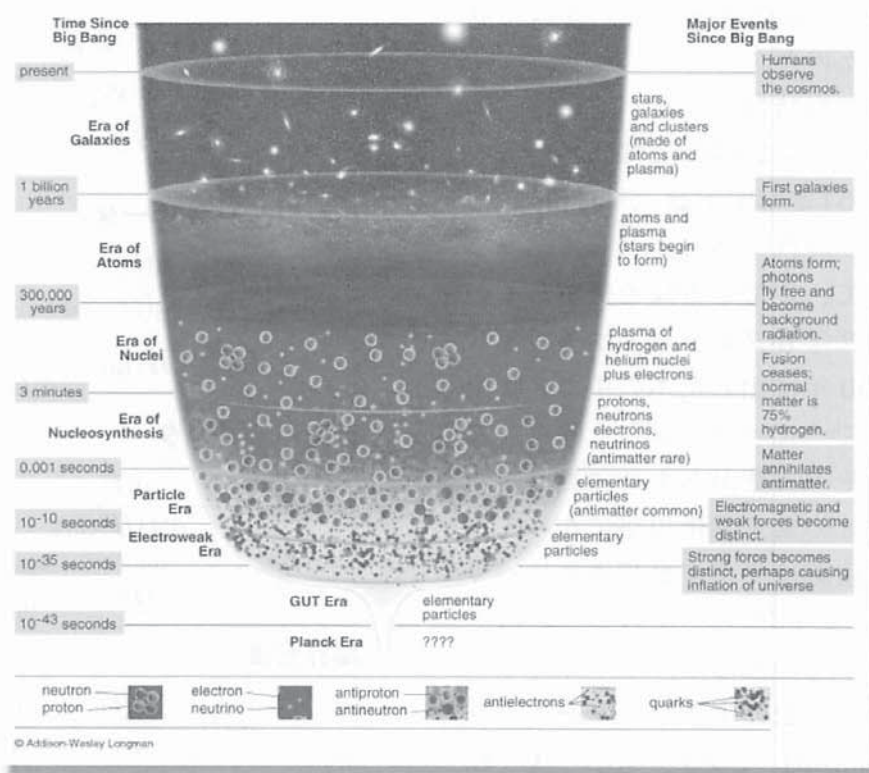


図 13 水平方向に空間を、上下方向に時間（下が過去で上が未来）を取って表したビッグバン宇宙の時空ダイアグラム

（出典 <http://www.futura-sciences.com/comprendre/d/images/510/bigbang.jpg>）

137 億年前に時空の一点からスタートした宇宙は、空間的には拡がりながら、時間的には未来へ移動しながら、時空の中で膨張していく。光の進む速度が有限なために、現在の宇宙では、約 100 億光年程度の有限の範囲しか見ることができない。現在の宇宙で見ることが出来る果てを“宇宙の地平線”と呼んでいるが、その向こうにも宇宙は存在している。

ジョージ・ガモフ (G. Gamow ; 1904～1968) は、ソ連 (当時) でフリードマンに学んだ後、1934 年、アメリカに移住した。彼は 1946 年に発表した論文で、宇宙における元素の生成を考察したのだが、元素の生成を説明するために、宇宙初期はきわめて高温高密度な状態で、かつ急速に膨張しつつあったと主張したのである。そしてさらに 1948 年、ラルフ・アルファー、ハンス・ベータと共に、こんにち、 $\alpha\beta\gamma$ 理論と呼ばれる記念碑的論文を発表した (アルファーから  $\alpha$  [アルファ]、ベータから  $\beta$  [ベータ]、そしてガモフから  $\gamma$  [ガンマ] をとってこう呼ぶ)。すなわち、高温高密度の火の玉状態の初期宇宙において、元素の生成を具体的に計算し、水素やヘリウム、リチウムなどの軽元素が実際に生成されることを確かめたのだ。

もともと、その当時はビッグバン宇宙 (膨張宇宙) の観測的証拠は少なく、「膨張宇宙論」とそれに対抗する「定常宇宙論」がほぼ拮抗していた。そういう時代である。そして、ガモフの提案に対して、定常宇宙論を提案していたイギリスの天文学者フレッド・ホイール (F. Hoyle) が、1950 年に出した本の中で、膨張宇宙論を揶揄して“ビッグバン”と呼んだのだ。ところが、その言葉があまりにピッタリだったもので、そのまま学術用語になってしまった。定常宇宙論はやがて棄却され、バカにした呼び名の“ビッグバン”が残ったのは、歴史の皮肉というものだろう。

さて以下では、上記のようなフリードマン (A. A. Friedmann) やルメートル (G. E. Lemaitre) が発見した「膨張宇宙モデル」について、フリードマン＝ルメートル方程式をきちんと解いていこうと思う。インフレーション宇宙の指数膨張解に比べれば、ビッグバン宇宙の減速膨張解の方が数学的には難しいのは興味深い。もともと、難しいとは言っても、媒介変数表示などを含めて、あくまでも

高校数学の範囲で扱えるという点は強調しておきたい。

### フリードマン＝ルメートル方程式

FL1 (Friedman=Lemaitre Equation 1)

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (4)$$

FL2 (Friedman=Lemaitre Equation 2)

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}p \quad (5)$$

(『天文教育』2007年5月号15頁より)

## 5.1 宇宙の臨界密度

フリードマン＝ルメートル方程式をそのまま積分することはできるが、しばしば“綺麗な”形で積分するために、変数の置き換えなどを行って変形する。そのための準備として、宇宙の臨界密度を含め、いくつかのパラメータを定義しておこう。

### ハッブルパラメータ

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{\dot{a}}{a} \quad (51)$$

$$H_0 \equiv H(t_0) = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} = \frac{\dot{a}_0}{a_0} \quad (52)$$

### 減速パラメータ

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)H^2(t)} = -\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{\dot{a}^2(t)} \quad (53)$$

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}_0}{a_0H_0^2} = -\frac{a_0\ddot{a}_0}{\dot{a}_0^2} \quad (54)$$

### 臨界密度

$$\rho_c(t) = \frac{\varepsilon_c(t)}{c^2} \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad (55)$$

$$\rho_{c,0} = \frac{\varepsilon_{c,0}}{c^2} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (56)$$

### 密度パラメータ

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (57)$$

$$\Omega_0 \equiv \frac{\rho(t_0)}{\rho_{c,0}} = \frac{\rho_0}{\rho_{c,0}} \quad (58)$$

【ハッブルパラメータ】

まず、宇宙のスケールファクター  $a$  とその時間微分の比として、(51) 式のように「ハッブルパラメータ」  $H(t)$  を定義する。ハッブルパラメータは宇宙の“膨張速度”を表すパラメータで、スケールファクターもその時間微分も時間とともに変化するので、ハッブルパラメータも時間とともに変わる。

そして、現在 ( $t_0=137$  億年) 時点でのハッブルパラメータの値——(52) 式——が「ハッブル定数」である。以下、添え字 0 は現在 ( $t=t_0$ ) での値を表し、添え字 0 のない変数はおおむね時刻  $t$  での値を表すとす。

【減速パラメータ】

最近の教科書などではあまり見かけないが、以前は使われていたものに、(53) 式のような、スケールファクターの 2 階微分で定義する「減速パラメータ」がある。これはそのまま宇宙の“加速度 (減速度)”を表すパラメータである。以下でも使わないが、ちょっとだけ紹介しておく。

【臨界密度】

宇宙が閉じているか否か、宇宙の曲率を決める重要なパラメータが、(55) 式のようにハッブルパラメータを用いて定義される「臨界密度」だ。詳しくは、またすぐ後で述べるが、ハッブルパラメータが時間の関数なので、臨界密度も時間と共に変化する。

また、ハッブル定数を用いて、現時点での臨界密度を (56) 式で定義する。具体的な値は後で紹介する。

【密度パラメータ】

臨界密度は、一般にはさまざまな値を取るなので、そのままでは扱づらい。そこで、宇宙に実際に存在するモノ (通常物質、ダークマター、ダークエネルギーなど) と臨界密度の比として、(57) 式のように「密度パラメータ」を定義する。たんなる置き換えにすぎないようだが、この密度パラメータを用

いれば、密度パラメータが 1 より大きいかわ小さいかで、すぐに宇宙が閉じているか開いているか簡単に判定できるという大きな利点があるのだ。

また、現時点での密度パラメータは、(58) 式のようになる。

では、宇宙の臨界密度 / 密度パラメータについて、もう少し詳しく説明しよう。

ここで (4) 式のフリードマン＝ルメートル方程式 FL1 に戻ってみよう。まず宇宙項  $\Lambda$  が無いとして、 $k$  を含む曲率項を左辺に残し、さらに、ハッブル定数や臨界密度を使って、FL1 を書き換えると、(59) 式のようになる。あるいは、(59) 式の全体をハッブルパラメータの 2 乗で割って、密度パラメータで書き換えると、(60) 式となる。

$$\begin{aligned} \frac{kc^2}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \\ &= \frac{8\pi G}{3}\rho - H^2 \\ &= \frac{8\pi G}{3}(\rho - \rho_c) \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \frac{kc^2}{a^2 H^2} &= \frac{\rho}{\rho_c} - 1 \\ &= \Omega - 1 \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \frac{kc^2}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \\ &= \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda - H^2 \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \frac{kc^2}{a^2 H^2} &= \frac{\rho}{\rho_c} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} - 1 \\ &= \Omega + \Omega_\Lambda - 1 \end{aligned} \quad (62)$$

すでに述べたように、 $k$  は、宇宙の曲率を決めるパラメータで、

$k=1$  : 閉じた宇宙

$k=0$  : 平坦な宇宙

$k=-1$  : 開いた宇宙

だった。そして重要なのは符号だった。このことを念頭に置いて (59) 式や (60) 式を見

れば、臨界密度の意味がはっきりしてくるだろう。すなわち、

$$\begin{aligned} \rho > \rho_c \quad (\Omega > 1) & \quad \text{宇宙の曲率は正} \\ \rho = \rho_c \quad (\Omega = 1) & \quad \text{宇宙の曲率は 0} \\ \rho < \rho_c \quad (\Omega < 1) & \quad \text{宇宙の曲率は負} \end{aligned}$$

という対応関係になるのだ。

宇宙項のないビッグバン膨張宇宙では、宇宙の物質密度がちょうど臨界密度に等しいとき、あるいは密度パラメータが 1 のとき、その時点で、宇宙は曲率が 0 の平坦な宇宙になっているのである。これは過去のどの時点でもいいし、もちろん現在時点でも成り立つ話である。

つぎに、宇宙項  $\Lambda$  がある場合について、いまの話を一一般化したものが、(61) 式と (62) 式になる。宇宙項があっても、 $\Lambda$  項を同等なエネルギー密度  $\rho_\Lambda$  に換算してしまえば、(61) 式のように宇宙項の成分が加わっただけで、基本的な話は同じになる。さらに、密度パラメータについても、宇宙項に係わる密度パラメータ  $\Omega_\Lambda$  を用意すれば、単に足し算になっていくだけだ。

宇宙項のあるビッグバン膨張宇宙では、物質や輻射や宇宙項など、あらゆる存在物の密度パラメータの和がちょうど 1 のとき、その時点で、宇宙は曲率が 0 の平坦な宇宙になっているのだ。後で述べるが、これが現在の宇宙の状態だと信じられている。

最後に、実際の宇宙の臨界密度は、いくらになるのだろうか。先にも述べたように、時間的に変化するハッブルパラメータの関数である臨界密度もまた時間の関数だが、現在時点での臨界密度は、現在時点でのハッブルパラメータすなわちハッブル定数がわかれば決まる。以前は、そのハッブル定数に不定性が残っていたため、臨界密度もその不定性を反映していたが、幸い、この数年で、ハッブル定数の値がかなり確定してきた。そしてその結果、現在の臨界密度の値も、かなりはつき

りした値として示すことができるようになったのだ。

現時点で信じられているハッブル定数の値 (63) 式を用いて計算した、現在時点での宇宙の臨界密度が (64) 式である。

$$H_0 = 72 \text{ km/s/Mpc} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \rho_{c,0} &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \\ &= 1.0 \times 10^{-29} \text{ g/cm}^3 \\ &= 5.4 \text{ keV/cm}^3 \\ &= 1.4 \times 10^{11} M_\odot/\text{pc}^3 \quad (64) \end{aligned}$$

角砂糖 1 個の体積 (1 立方 cm) に 10 のマイナス 29 乗と言われてもピンと来ないだろうが、1 立方パーセクに 1000 億太陽質量ならかなりの量だと思えるだろう…んん、いくらなんでも多すぎる。検算してみたら、(64) 式の最後の行は、1 立方メガパーセクあたりであった (笑)。

つまり、現在の宇宙の臨界密度は、おおざっぱに、銀河団ぐらいの拡がり (1 立方メガパーセク) に、光で見える銀河 1 個分ぐらい (1000 億太陽質量) ということになる。もちろん、この臨界密度は、宇宙全体で均したもののなので、実際には、銀河団や銀河の領域のように臨界密度より高い領域もあれば、銀河団空間のように臨界密度より低い領域もある。

## 5.2 フリードマン方程式を積分する

いよいよフリードマン＝ルメートル方程式の積分である。いままで何度も出てきた FL1、(4) 式あるいは (61) 式を積分して、(宇宙項なしの) フリードマン解や (宇宙項入りの) ルメートル解を求めてみよう。

具体的な解を求める前に、FL1 の形のままで、いささか扱いづらいので、変数をいろいろ変換して、綺麗な形に整形しよう。

変形の目標としては、

- ・空間の曲率  $k$  を密度パラメータに変える
- ・具体的に密度の時間変化を入れる
- ・できるだけ現在値に置き直す

などの処理をして、スケールファクターに関する解きやすい微分方程式の形にもっていきたい。同時にいろいろな置き換えをしていくので混乱しそうだが、変形自体は、中学校レベルの代数式変形をするだけである。

$$\begin{aligned} H^2 + \frac{kc^2}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_\Lambda) \\ &= \frac{8\pi G}{3}(\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda) \\ &= H^2 \frac{\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda}{\rho_c} \end{aligned} \quad (65)$$

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (66)$$

$$a^2 H^2 + kc^2 = a^2 H^2 \frac{\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda}{\rho_c} \quad (67)$$

$$a_0^2 H_0^2 + kc^2 = a_0^2 H_0^2 \frac{\rho_{r,0} + \rho_{m,0} + \rho_{\Lambda,0}}{\rho_{c,0}} \quad (68)$$

まず、FL1 を (65) 式のような形に書き直してみよう。先にも注意したように、(66) 式で定義されるハッブルパラメータを含め、添え字 0 のない量はしばしば時間の関数である。また、いままでははっきり区別していなかったが、エネルギー密度については、

輻射エネルギー密度：  $\rho_r$

物質エネルギー密度：  $\rho_m$

ダークエネルギー密度：  $\rho_\Lambda$

をきちんとわけた（物質エネルギー密度は、通常物質だけでなく暗黒物質も含んだもの）。さらに、(65) 式の最後の行では、臨界密度の定義を使って、やや邪魔な、“万有引力定数”を隠した。

この (66) 式の両辺に  $a^2$  をかけたのが (67) 式で、さらに、その現在での値を取ったものが (68) 式になる。この (67) 式と (68) 式を辺々差し引くと、やはり邪魔な曲率  $k$  に舞台から消えていただくことができる。そうして少し整理したものが (69) 式である。だいぶいい感じになってきた。

$$\begin{aligned} a^2 H^2 &= a^2 H^2 \frac{\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda}{\rho_c} \\ &+ a_0^2 H_0^2 \left( 1 - \frac{\rho_{r,0} + \rho_{m,0} + \rho_{\Lambda,0}}{\rho_{c,0}} \right) \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{H_0^2} &= \frac{H^2}{H_0^2} \frac{\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda}{\rho_c} \\ &+ \frac{a_0^2}{a^2} \left( 1 - \frac{\rho_{r,0} + \rho_{m,0} + \rho_{\Lambda,0}}{\rho_{c,0}} \right) \\ &= \frac{\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda}{\rho_{c,0}} \\ &+ \frac{a_0^2}{a^2} \left( 1 - \frac{\rho_{r,0} + \rho_{m,0} + \rho_{\Lambda,0}}{\rho_{c,0}} \right) \end{aligned} \quad (70)$$

引き続き、(69) 式の両辺を  $a^2 H_0^2$  で割って、さらに右辺の第一項を臨界密度の定義などで書き換えたものが (70) 式となる。この (70) 式がとりあえずは欲しかった整形後の式である。

整形前の (65) 式と比べたとき、目口鼻の対応はつくわけで、(70) 式左辺のハッブルパラメータの 2 乗の項や、右辺第一項のエネルギー密度に関する項は、(65) 式でもすぐに見分けがつくだろう。となると、(70) 式右辺の第二項が、姿を変えた曲率に関する項になるはずだ。実際、後で詳しく述べるが、宇宙の曲率が 0 だと、この項はなくなるし、曲率が 0 でないときは、プラスまたはマイナスの値を取る。

$$\rho_r(t) = \frac{a_0^4}{a^4(t)} \rho_{r,0} \quad (71)$$

$$\rho_m(t) = \frac{a_0^3}{a^3(t)} \rho_{m,0} \quad (72)$$

$$\rho_\Lambda(t) = \frac{a_0^0}{a^0(t)} \rho_{\Lambda,0} = \text{一定} \quad (73)$$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{a_0^4 \rho_{r,0}}{a^4 \rho_{c,0}} + \frac{a_0^3 \rho_{m,0}}{a^3 \rho_{c,0}} + \frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_{c,0}} + \frac{a_0^2}{a^2} \left( 1 - \frac{\rho_{r,0} + \rho_{m,0} + \rho_{\Lambda,0}}{\rho_{c,0}} \right) \quad (74)$$

ではつぎに、第二ステップとして、エネルギー密度の時間変化を取り入れてみよう。

宇宙膨張に伴う輻射エネルギー密度、物質エネルギー密度、そしてダークマターエネルギー密度は、現在での値を用いて、それぞれ、

(71) 式から (73) 式のように表すことができる。状態方程式などはきちんと説明していないので、やや天下りではあるが、これらの式の意味は難しくない。

まず (73) 式のダークマターエネルギー密度だが、これはその定義から宇宙項  $\Lambda$  に比例している (いまとなつては、 $\Lambda$  の値はどうでもいい)。したがって  $\Lambda$  が一定ならば、このダークマターエネルギー密度も一定になる。

また、(72) 式で表される物質エネルギー密度の変化は、宇宙が膨張するにつれて体積が長さ (スケールファクター) の 3 乗で増加することを考えれば、当たり前の式だ。

これらの中でわかりにくいのは、(71) 式の輻射エネルギー密度である。輻射エネルギー密度がスケールファクターの 4 乗で変化するのは、いくつか説明の方法はあるが、おおざっぱには以下の理由でいい、はずだ。輻射 (光子) の数自体は、物質エネルギー密度と同様に、体積の増加に伴ってスケールファクターの 3 乗に反比例して減少する。一方、光子 1 個のエネルギーは振動数に比例する (波

長に反比例する)。ところが、宇宙が膨張すると波長がスケールファクターに比例して伸びる (振動数が小さくなる) ために、光子のエネルギーはスケールファクターに反比例して減少する。その結果、スケールファクターの  $(3+1)=4$  乗で減少することになるわけだ。

以上、エネルギー密度のスケールファクター依存性をあからさまに入れて、(70) 式を書き直すと、(74) 式が得られる。

さらに、(74) 式の右辺がごちゃごちゃしているので、輻射/物質/宇宙項 (ダークエネルギー) /全存在物に関する密度パラメータを (75) 式から (78) 式のように定義すると、最終的に、(79) 式のようなすっきりした形に整形することができた。あるいは、全体のルートを取って、(80) 式の形にしておこう。この (79) 式あるいは (80) 式が、フリードマン=ルメートル方程式 FL1 を、スケールファクターと現在での密度パラメータを使って、あらわに書き下した方程式である。

$$\Omega_{r,0} \equiv \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{c,0}} \quad (75)$$

$$\Omega_{m,0} \equiv \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{c,0}} \quad (76)$$

$$\Omega_{\Lambda,0} \equiv \frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_{c,0}} \quad (77)$$

$$\Omega_0 \equiv \frac{\rho_{r,0} + \rho_{m,0} + \rho_{\Lambda,0}}{\rho_{c,0}} = \Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} \quad (78)$$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{a_0^4}{a^4} \Omega_{r,0} + \frac{a_0^3}{a^3} \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{a_0^2}{a^2} (1 - \Omega_0) \quad (79)$$

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{a_0^4}{a^4} \Omega_{r,0} + \frac{a_0^3}{a^3} \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{a_0^2}{a^2} (1 - \Omega_0)} \quad (80)$$

$$\frac{1}{H_0 a_0} \dot{a} = \sqrt{\frac{a_0^2}{a^2} \Omega_{r,0} + \frac{a_0}{a} \Omega_{m,0} + \frac{a^2}{a_0^2} \Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_0)} \quad (81)$$

$$y(t) \equiv \frac{a(t)}{a_0} \quad (82)$$

$$\frac{1}{H_0} \frac{dy}{dt} = \sqrt{\Omega_{r,0} \frac{1}{y^2} + \Omega_{m,0} \frac{1}{y} + \Omega_{\Lambda,0} y^2 + (1 - \Omega_0)} \quad (83)$$

$$H_0 t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\Omega_{r,0} \frac{1}{y^2} + \Omega_{m,0} \frac{1}{y} + \Omega_{\Lambda,0} y^2 + (1 - \Omega_0)}} \quad (84)$$

この(80)式は複雑そうだが、実は変数分離型の微分方程式になっていて、形式的にはすぐに積分できる。すなわち、変形中は  $H$  の姿の方が便利だったハッブルパラメータを(66)式の定義にしたがって、もとの姿に戻し、両辺に  $a/a_0$  を掛けると、(80)式は(81)式のようになる。さらに、(82)式のように、スケールファクターを現在値で規格化した変数  $y$  を定義すると、(81)式は(83)式となる(当然、 $y$  の現在の値は1である)。この(83)式は規格化したスケールファクター  $y$  の時間変化を表す微分方程式だが、右辺は少しややこしいものの  $y$  だけの関数なので、高等学校の数学(理系)でも習う、いわゆる変数分離型というやつだ。すなわち、 $y$  や  $dy$  を含む項を左辺に、 $dt$  を含む項 ( $H_0 dt$ ) を右辺に動かすと、変数が分離できるので、両辺をそれぞれ積分すればよい。積分して両辺を入れ替えた結果が(84)式である。

この(84)式をみてわかるように、時間に関する積分は単純に  $H_0 t$  になるが、 $y$  に関する積分は、一般的には解析的にはできないので、積分記号のまま残っている。という意味で、形式的な積分ではある。以下では、ある特定の状況でいくつかの項が無視できて、解析的に積分できる場合を紹介していく。

なお、一般的な形でも、密度パラメータ(放射と物質とダークエネルギーと3通りある)

を与えて、(84)式を数値的に積分することは難しくない。いろいろな値を与えて、自分なりのビッグバン宇宙を作ってみるのも一興だろう。ちなみに、現在の宇宙モデルでは、

$$\begin{aligned} \Omega_{r,0} &\sim 0 \\ \Omega_{m,0} &\sim 0.3 \\ \Omega_{\Lambda,0} &\sim 0.7 \end{aligned}$$

程度だと考えられている。

### 5.3 いくつかの単純な解

一般的な(84)式は、積分の分母にいくつも項があるために解析的には積分できないが、項が一つなら簡単に積分できる。最初にそのような単純な解を求めてみるが、それぞれ、物理的にはちゃんと意味のある解である。

密度パラメータをみるとわかるように、(84)式右辺分母の各項は、第一項が放射エネルギー密度の寄与、第二項が物質エネルギー密度の寄与、第三項がダークエネルギー密度の寄与、そして最後の項が宇宙全体の曲率である。

さて、まず、宇宙のごく初期( $t \sim 0$ )には、宇宙は非常に小さく、変数  $y$  は1に比べて非常に小さい。このとき分母の第一項は他の項に比べて十分大きく、他の項を無視する近似をしていいだろう。第一項だけを残して積分したものが(85)式、あるいは、スケールファクターであらわに書き直したのが(86)式である。

#### 放射優勢宇宙

$$\begin{aligned} H_0 t &= \int_0^y \frac{y dy}{\sqrt{\Omega_{r,0}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Omega_{r,0}}} \frac{1}{2} y^2 \end{aligned} \quad (85)$$

$$\frac{a}{a_0} = \sqrt{2\sqrt{\Omega_{r,0}} H_0 t} \quad (86)$$

物質優勢宇宙

$$H_0 t = \int_0^y \frac{y^{1/2} dy}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} \frac{2}{3} y^{3/2} \quad (87)$$

$$\frac{a}{a_0} = \left( \frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{m,0}} H_0 t \right)^{2/3} \quad (88)$$

ダークエネルギー優勢宇宙

$$H_0 t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0} y}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}} \ln y \quad (89)$$

$$\frac{a}{a_0} = e^{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} H_0 t} \quad (90)$$

第一項は輻射エネルギー密度を表していたので、この解が表しているのは「放射優勢宇宙」の膨張の様子である。放射が優勢な初期ビッグバン宇宙は、時間の平方根に比例して膨張するのだ (図 14)。

輻射エネルギー密度の密度パラメータはほぼ 0 に近いので、宇宙のごく初期以外では第一項は効かない。すなわち、宇宙膨張が進むと、変数  $y$  はまだ十分に小さい段階で、第二項が優勢になってくる。第二項だけを残して積分したのが、(87) 式あるいは (88) 式である。

第二項は物質エネルギー密度を表していたので、この解が表しているのは「物質優勢宇宙」の進化だ。物質が優勢なビッグバン宇宙は、時間の  $2/3$  乗に比例して膨張をしていくことがわかる (図 14)。

さらに時が進むと、第三項のダークエネルギー密度の寄与が重要になってくるだろう。具体的に分母の第二項と第三項が等しくなるのは、

$$y = (\Omega_{m,0} / \Omega_{\Lambda,0})^{1/3}$$

のときである。現在のパラメータを入れると、

$$y \sim 0.75$$

ぐらいになる。第三項だけを残して積分したものが (89) 式あるいは (90) 式になる。

いままでに何度も出てきた指数解で、「ダークエネルギー優勢宇宙」は、指数的に膨張するのである (図 14)。

図 14 では、それぞれの解をばらばらに描いているが、放射のみの解が物質のみの解につながり、 $y \sim 0.75$  ぐらいで  $\Lambda$  のみの解のようにになっているのが、現実の宇宙膨張の仕方に近い (後述)。

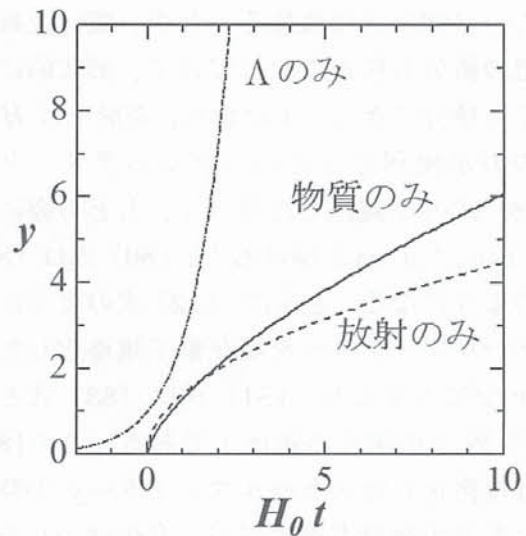


図 14 単純な膨張宇宙解

5.4 フリードマン膨張宇宙モデル

ようやく、といった感である。やっとフリードマン解まで到達した。こっちとしても、30 年ほど前の学部生時代にタイムスリップしたような気がする (笑)。当時の記法はいまとは少し違ったが、基本的には同じ解を学んだものだ。

古典的なフリードマン解では、宇宙に存在するのは物質のみだと仮定する。物質としては、圧力のない冷たい物質、いわばダスト (塵) を考えていたが、昨今の暗黒物質を含めても構わない。したがって、密度パラメータの値は、



フリードマン宇宙

$$H_0 t = \int_0^y \frac{\sqrt{y} dy}{\sqrt{\Omega_{m,0} + (1 - \Omega_{m,0}) y}} \quad (91)$$

平坦なフリードマン宇宙

( $k = 0, \Omega_{m,0} = 1$ )

$$H_0 t = \int_0^y \sqrt{y} dy = \frac{2}{3} y^{3/2} \quad (92)$$

$$\frac{a}{a_0} = \left( \frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3} \quad (93)$$

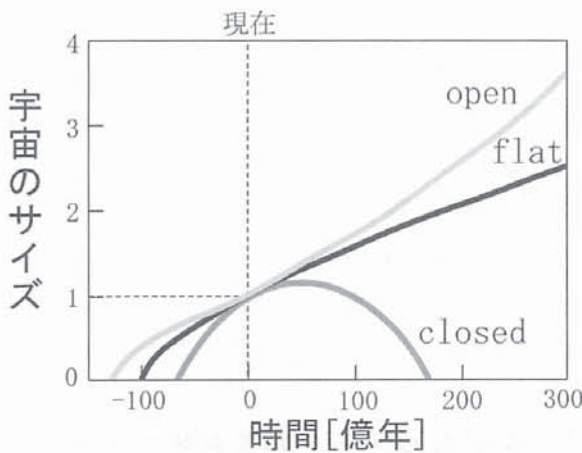


図15 フリードマン膨張宇宙：宇宙項なしの基本的な宇宙モデル

閉じた宇宙 (closed ;  $\Omega > 1$ )、平坦な宇宙 (flat ;  $\Omega = 1$ )、開いた宇宙 (open ;  $\Omega < 1$ ) がある。

$$\Omega_{r,0} = 0$$

$$\Omega_{\Lambda,0} = 0$$

$$\Omega_0 = \Omega_{m,0}$$

となる。このとき一般形 (84) 式は (91) 式のように書き直せる。以下、曲率を変えて、いわゆる平坦な宇宙、閉じた宇宙、そして開いた宇宙を解いていこう。

まず曲率が 0 ( $\Omega_{m,0} = 1$ )、いわゆる「平坦な宇宙 (flat universe)」の場合だ。宇宙の物質 (+エネルギー) 密度がある特定の臨界値 — 「臨界密度 (critical density) =  $10^{-29}$  g/cm<sup>3</sup>」になっていると、物質の重力と宇宙膨張の勢いがちょうど釣り合った状態になっ

ていて、宇宙膨張は一定の割合で永遠に続く。このときは宇宙全体の空間構造は平坦なために、平坦な宇宙と呼ばれる。

この平坦な宇宙の場合は、簡単で、(91) 式はすぐに積分できて、(92) 式および (93) 式となる。平坦な宇宙は、時間の 2/3 乗で膨張する (図 15)。先に出てきた物質優勢宇宙と似ているが、密度パラメータの分だけ係数が異なる点に注意しておく。

閉じたフリードマン宇宙

( $k = 1, \Omega_{m,0} > 1$ )

$$x = \frac{\Omega_{m,0} - 1}{\Omega_{m,0}} y \quad (94)$$

$$H_0 t = \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}} [\sin^{-1} \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}] \quad (95)$$

$$\frac{a(\theta)}{a_0} = \frac{\Omega_{m,0}}{2(\Omega_{m,0} - 1)} (1 - \cos \theta) \quad (96)$$

$$H_0 t(\theta) = \frac{\Omega_{m,0}}{2(\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}} (\theta - \sin \theta) \quad (97)$$

おつぎは、曲率が正 ( $\Omega_{m,0} > 1$ )、いわゆる「閉じた宇宙 (closed universe)」の場合だ。すなわち、宇宙の物質密度が十分大きいと、物質の重力を振り切って膨張を続けることができなくなり、宇宙の膨張はやがて収縮に転じる。このときは宇宙全体の空間構造は閉じているので、閉じた宇宙と呼ばれる。

閉じた宇宙の場合は少し面倒で、(91) 式は上手に変数変換をして積分する必要がある。中間は省略して、解析的な解の 2 通りの表し方を紹介する。

まず、一つ目の表現は、無次元化したスケールファクターと時間の関係の一つの式で表したもので、(95) 式がその解だ。変数  $x$  を間に挟んでいるが、(95) 式は無次元化したスケールファクター  $y$  を与えれば、逆三角関数などを用いて時間  $t$  が求まる関係になっている。

もう一つは媒介変数表示で、 $\theta$  を媒介変数として、スケールファクターと時間を表現し

たのが、(96) 式と (97) 式である。媒介変数の範囲は  $0 < \theta < 2\pi$  である。

どちらの表現でもいいのだが、媒介変数表示をみると、閉じた宇宙はサイクロイド的に変化することがわかる (図 15)。図 15 はフリーハンドで適当に描いているが、密度パラメータを具体的に与えて、解をきちんと描くことは難しくないだろう。

#### 開いたフリードマン宇宙

( $k = -1, \Omega_{m,0} < 1$ )

$$x = \frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} y \quad (98)$$

$$H_0 t = \frac{\Omega_{m,0}}{(1 - \Omega_{m,0})^{3/2}} [\sqrt{x(1+x)} - \sinh^{-1} \sqrt{x}] \quad (99)$$

$$\frac{a(\xi)}{a_0} = \frac{\Omega_{m,0}}{2(1 - \Omega_{m,0})} (\cosh \xi - 1) \quad (100)$$

$$H_0 t(\xi) = \frac{\Omega_{m,0}}{2(1 - \Omega_{m,0})^{3/2}} (\sinh \xi - \xi) \quad (101)$$

最後に、曲率が負 ( $\Omega_{m,0} < 1$ )、いわゆる「開いた宇宙 (open universe)」の場合だ。

宇宙の物質密度が臨界密度より小さいと、物質の重力作用で膨張を止められないので、宇宙膨張は加速しながら永遠に続く。このときは宇宙全体の空間構造は開いているために、開いた宇宙と呼ばれる。

開いた宇宙の場合も面倒で、結果だけ、解析的な解の 2 通りの表し方を紹介する。

まず、一つ目の表現は、一つの式で表した (99) 式だ。今度は逆双曲線関数なんかが出てくるが、まあ、一応、解析解になっている。

もう一つはやはり媒介変数表示で、 $\xi$  (グザイ、クシー) を媒介変数として、スケールファクターと時間を表現したのが、(100) 式と (101) 式である。媒介変数の範囲は  $0 < \xi$  で上限はない。

開いた宇宙のスケールファクターは時間とともに永遠に大きくなる (図 15)。図 15 はフリーハンドで適当に描いているが、密度パラメータを具体的に与えて、解をきちんと描く

ことは難しくないだろう。

以上が、古典的で有名なフリードマン膨張宇宙の解である。

ところで余談だが、宇宙開闢の大爆発を「ビッグバン (Big Bang)」と呼ぶのに対して、閉じた宇宙の最後はぐしゃっと潰れることから「ビッグクランチ (Big Crunch)」と呼ぶ。クランチチョコレートで、かみ砕くという意味だから、まあ、訳すとしたら、さしずめ“大破碎”ぐらいだろうか。このビッグクランチという言い方はずいぶん前からあったのを覚えているが、平坦な宇宙や開いた宇宙の最後をどう呼ぶかは、以前はピッタリの言い方はなかったように思う。でも、最近では、永遠に膨張し続ける宇宙の最後を「ビッグチル (Big Chill)」と呼ぶらしい。チルド室のチルで、冷氣とか寒気という意味だから、“大冷極”とか“大凍結”あたりかな。

#### 5.5 平坦なルメートル膨張宇宙モデル

では、現実の宇宙はどうなっているのだろうか。30 年前には、(宇宙項なしの) フリードマン宇宙あるいは (宇宙項ありの) ルメートル宇宙のさまざまな解が知られていたものの、現実の宇宙のパラメータがどうなのかがわからなかったので、正しい解を知るすべがなかった。実際、当時のノートを見ると、曲率と宇宙項の組み合わせによって、さまざまな解が挙げられ分類されている。しかし、長年にわたる観測の積み重ねによって、いま現在、われわれの宇宙は、年齢が約 137 億歳であること、その空間構造は平坦で、かつ宇宙項に相当するもの—ダークエネルギーが存在していること、そして物質の重力によって膨張がゆるやかになってきていた減速膨張から、ダークエネルギーによって膨張が激しくなる加速膨張の時代に入っているらしいことがわかってきた。

このようなことが解明される時代に生きて

いることは、とてもタイムリーでエキサイティングだし、個人的には宇宙論の進展を目の当たりに見ることができて幸せだと思う。実際、いまの高校生ぐらいだと、いきなり宇宙の年齢とかダークエネルギーから既知の知識

表 2 最新の観測推定値

全体	$\Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda$ $= \Omega_b + \Omega_{DM} + \Omega_\Lambda = 1$
物質 30%	$\Omega_m = 0.30$
ダークエネルギー (宇宙項) 70%	$\Omega_\Lambda = 0.70$
物質の内訳	$\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{DM} = 0.30$
通常物質 4%	( $\Omega_b = 0.04$ )
星・銀河 1%	
ガスなど 3%	
ダークマター 26%	( $\Omega_{DM} = 0.26$ )

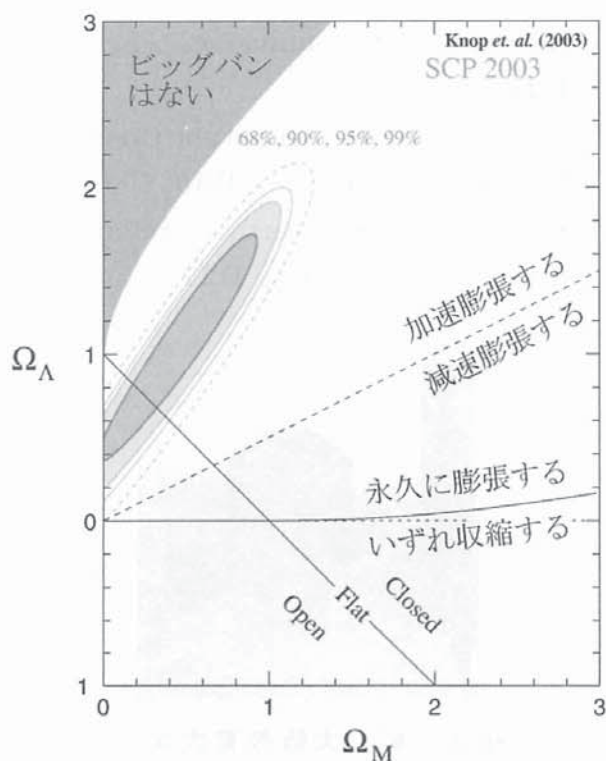


図 16 宇宙論パラメータの推定領域 (出典 <http://supernova.1b1.gov/>)

として知らされてしまう。だから、最初はわからなかったことが、少しずつ謎が解けていき、新しい宇宙像が組み上がっていくワクワク感を肌で感じることはできないわけだ。ちょうど“ファーストガンダム” (『機動戦士ガンダム』) からリアルタイムで観ることができた幸せに近い感がある (笑)。閑話休題。

とまれ、いま述べたように、現在の宇宙は、平坦で  $\Omega_0$  は 1 だと考えていいようだ。また輻射エネルギー密度は 0 としよう。すなわち、

$$\Omega_{r,0} = 0$$

$$\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$$

が現在の宇宙における、密度パラメータの推定値である。なお、もう少し細かい内訳を表 2 に、超新星探査などで得られた宇宙論パラメータの推定領域を図 16 に示しておく。

さて、密度パラメータが上のような値のとき、一般形 (84) 式は (102) 式のように書き直せる。そして、物質 (通常物質+暗黒物質) の密度パラメータ (103) 式とダークエネルギーの密度パラメータ (104) 式の比の 1/3 乗を (105) 式のように表すと、(102) 式の積分は (106) 式となる。

平坦なフリードマン=ルメートル宇宙  
( $k = 0, \Omega_0 = 1, \Omega_{r,0} = 0$ )

$$\begin{aligned} H_0 t &= \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\Omega_{m,0} \frac{1}{y} + \Omega_{\Lambda,0} y^2}} \\ &= \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\Omega_{m,0} \frac{1}{y} + (1 - \Omega_{m,0}) y^2}} \end{aligned} \quad (102)$$

$$\Omega_{m,0} \sim 0.3 \quad (103)$$

$$\Omega_{\Lambda,0} \sim 0.7 \quad (104)$$

$$\omega_{m/\Lambda} \equiv \left( \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \sim 0.7 \quad (105)$$

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{1 - \Omega_{m,0}}} \ln \left[ \left( \frac{y}{\omega_{m/\Lambda}} \right)^{3/2} + \sqrt{1 + \left( \frac{y}{\omega_{m/\Lambda}} \right)^3} \right] \quad (106)$$

規格化したスケールファクター  $y$  とパラメータ  $\omega_{m/\Lambda}$  の大小関係によって、宇宙膨張の振る舞いは変化する。すなわち、規格化したスケールファクター  $y$  がパラメータ  $\omega_{m/\Lambda}$  より十分に小さいと、(106) 式は (92) 式のような解に近似され、平坦なフリードマン宇宙と同様な減速膨張をしていることになる。逆に、規格化したスケールファクター  $y$  がパラメータ  $\omega_{m/\Lambda}$  より大きくなると、(106) 式は (89) 式のような指数解に近似され、ダークエネルギーによって加速膨張をしている状態だ。

そして、規格化したスケールファクター  $y$  がパラメータ  $\omega_{m/\Lambda}$  の値 ( $\sim 0.75$ ) と同じときが減速膨張から加速膨張への移り変わりの時期となる。表 1 (2007 年 5 月号 11 頁) を振り返ってみると、0.75 ということは、いまから約 46 億年前ぐらいだ。太陽と太陽系が誕生したころに、宇宙は減速膨張から加速膨張に移行したことになる。これはなかなか興味深い一致である。現在は  $y=1$  なので、やや加速膨張に入った時期なのである (図 17)。

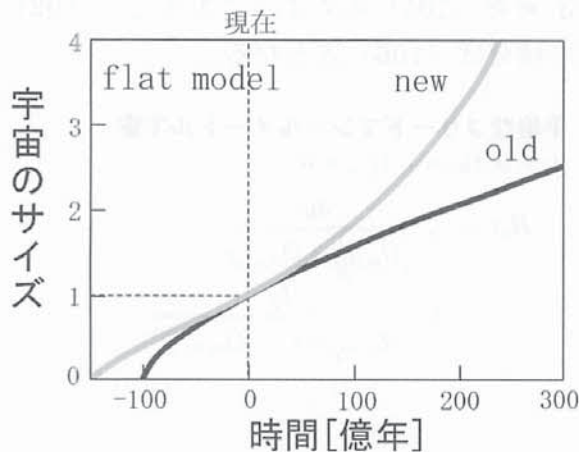


図 17 平坦な減速膨張宇宙と加速膨張宇宙：現在の描像 (new)

宇宙は平坦だが、宇宙項があると考えられている。宇宙項なしの平坦なモデル (old;  $\Omega_m=1$ ,  $\Omega_\Lambda=0$ ) と、宇宙項ありの平坦なモデル (new;  $\Omega_m=0.3$ ,  $\Omega_\Lambda=0.7$ ) は、膨張の仕方が違う。

ワン・モア・ピリオド：

最終的な (106) 式に、現在の値 ( $y=1$ ,  $\omega_{m/\Lambda}=0.75$ ) を入れ、さらに現在のハッブル定数 ( $H_0=72\text{km/s/Mpc}$ ) を入れると、現在の宇宙年齢  $t_0$  が算出される。計算してみたら、132 億年となった。うーん、公称値の 137 億年と少し違うなあ。ま、いっか。

## 参考文献

### ○単行本

福江 純 (2005) 『100 歳になった相対性理論』、講談社。

ミチオ・カク (2006) 『パラレルワールド』(斉藤隆央 訳)、NHK 出版。

バーバラ・ライデン (2003) 『宇宙論入門』(牧野伸義 訳)、ピアソン・エデュケーション。

Gerhard Borner (1993) “The Early Universe”, Springer-Verlag.

### ○論文

Hartle, J. and Hawking, S. W. (1983) Wave function of the universe, *Phys. Rev. D*28, 2960.

Vilenkin, A. (1984) Quantum Creation of Universes, *Phys. Rev. D*30, 509.

Vilenkin, A. (1983) Birth of inflationary universes, *Phys. Rev. D*27, 2848.