連載 隣のブラックホール【5】

# ブラックホールの重力

福江　純（大阪教育大学）

ニュートンの万有引力の法則もアインシュタインの一般相対論も、共に、物質がお互いに引き合う力－重力－に関する理論だ。では、ニュートンの重力とアインシュタインの重力は、どこが違うのだろうか？　本章では、重力の性質について念頭に置きながら、特別な半径であるシュバルツシルト半径、重力と潮汐力、エネルギーとポテンシャルについて、まとめておこう。

## 5－1　シュバルツシルト半径

### 1）脱出速度

ブラックホールの真の描像はアインシュタインの一般相対論で明らかになったのだが、ニュートン力学を使ってもブラックホールのような天体を考えることができる。実際すでに18世紀末に、イギリスの天文学者ジョン・ミッチェル（J. Michel）やフランスの科学者ピエール・シモン・ド・ラプラス（P. Laplace）らが、光では見えない天体のことを予言している。

天体の表面から天体の重力に逆らってロケットを打ち上げたとしよう。打ち上げ速度が小さいと、ロケットはふたたび天体の表面へ落ちてくるが、十分な速度で打ち上げれば、ロケットは天体の重力を振り切って無限の彼方へ飛び出していくだろう（図5・1）。無限遠に飛び出すための最低限の速度が、その天体の「脱出速度」である。たとえば、地球の脱出速度は秒速11.2kmだし、太陽の脱出速度は秒速618kmである（表5・1）。

天体の半径が同じなら、天体の質量が大きいほど表面での重力が強いので、脱出速度は大きくなる。また天体の質量が同じなら、天体の半径が小さいほどやはり表面での重力が強くなるので、脱出速度は大きくなる。そこでミッチェルやラプラスは、天体の質量をどんどん大きくしていけば、ついには脱出速度が光速を超えてしまい、そしてそのような天体からは光でさえ脱出できないので、観測することができないだろうと予想したのである。

図5・1　重力を振り切る

表5・1　天体の脱出速度

| 天　体 | 質　量 | 半　径 | 脱出速度 |
|---|---|---|---|
| 地球 | $6 \times 10^{24}$kg | 6400km | 11.2km/s |
| 太陽 | $2 \times 10^{30}$kg | 70万km | 618km/s |
| 白色矮星 | 約1太陽質量 | 約1万km | 約1万km/s |
| 中性子星 | 約2太陽質量 | 約10km | 約10万km/s |
| 恒星ブラックホール | 約10太陽質量 | 30km | 30万km/s（光速） |
| 巨大ブラックホール | 約1億太陽質量 | 2天文単位 | 30万km/s（光速） |

2）シュバルツシルト半径

ニュートン力学の脱出速度で考えると、天体表面での脱出速度が光速に等しくなるときの半径が「シュバルツシルト半径」である。シュバルツシルト半径の内側がブラックホール領域と考えていいので、シュバルツシルト半径は、いわば“ブラックホールの半径”である（図5・2）。

シュバルツシルト半径は天体の質量に比例して大きくなる。具体的には、地球の質量だとシュバルツシルト半径は9mm、太陽の質量だと3km、そして太陽の10倍の質量のブラックホールだと30kmになる（表5・2）。

このようなニュートン力学の描くブラックホールのイメージは、非常にわかりやすいし、また受け入れやすいものである。しかしながら、ブラックホールの本質を得るには一般相対論が必要だった。ブラックホールはアインシュタインの一般相対論を用いて、はじめて正しく記述することができる。

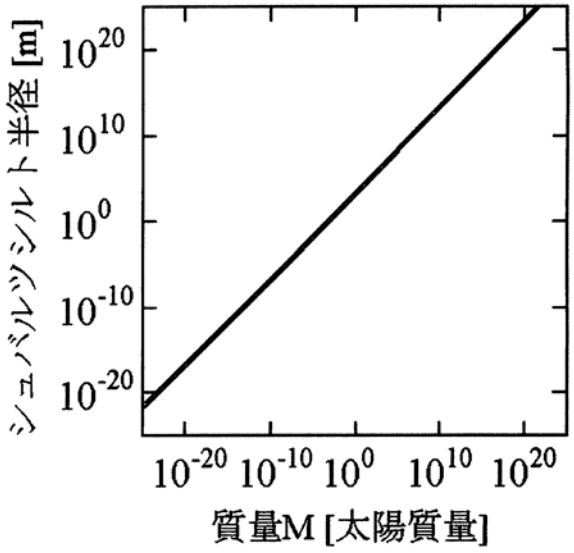


図5・2　質量とシュバルツシルト半径の関係

表5・2　天体のシュバルツシルト半径

| 天　体 | 質量 $M$ | 半径 $R$ | シュバルツシルト半径 $r_g$ | 比率 $r_g/R$ |
|---|---|---|---|---|
| 地球 | $6 \times 10^{24}$kg | 6400 km | 0.9 cm | 7億分の1 |
| 太陽 | $2 \times 10^{30}$kg | 70万km | 3 km | 20万分の1 |
| 白色矮星 | 約1太陽質量 | 約1万km | 3 km | 0.0003 |
| 中性子星 | 約2太陽質量 | 約10 km | 6 km | 0.6 |
| 恒星ブラックホール | 10太陽質量 | 30 km | 30 km | 1 |
| 巨大ブラックホール | 1億太陽質量 | 2天文単位 | 2天文単位 | 1 |

一般相対論では質量のまわりでは空間が曲がっていると考える（図5・3）。天体の質量を固定して半径を小さくしていくと、狭い領域に質量が集中するので、空間の曲がりもどんどん大きくなるだろう。光は空間の曲がりに沿って進むのだが、空間の曲がりがあまりに大きくなると、光さえも空間のゆがみの中から逃れることができなくなる（脱出速度のたとえで言えば、脱出速度が光速になる）。一般相対論が描くブラックホールとは、このように時空の曲率が大きくなって、光でさえも脱出できなくなった天体なのだ。

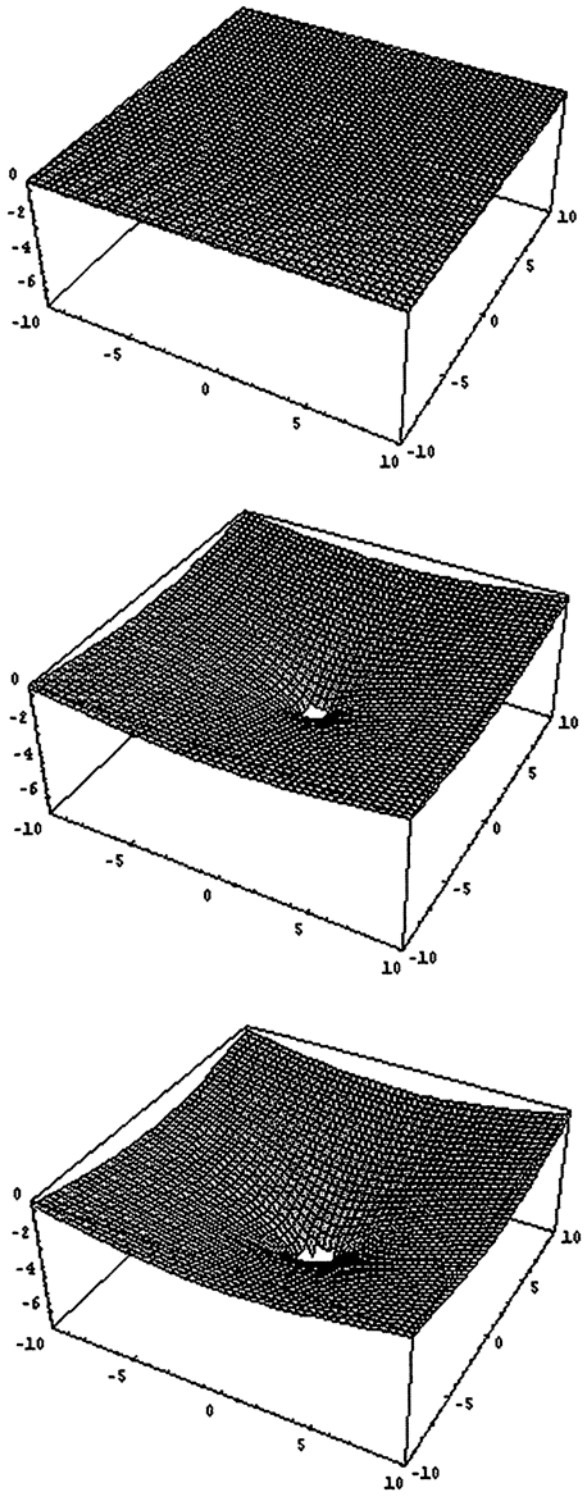

図5・3　3次元の超空間に埋め込まれた2次元の実空間。重力が強くなると空間の歪みが大きくなり、ついには、空間の曲がりに穴が開いてしまう。

**■数式コーナー：脱出速度の導出■**

天体の脱出速度を具体的に求めてみよう。

ロケットが無限遠に飛び去ることができるということは、天体の表面で、ロケットの運動エネルギーが位置エネルギーを超えていることになる。ところで、無限遠に飛び去ることのできる最小の打ち上げ速度が脱出速度であるから、脱出速度では運動エネルギーと位置エネルギーとは等しくなる。

ロケットの質量を $m$、天体表面での打ち上げ速度を $v$ とすると、打ち上げ時のロケットの運動エネルギーは、

$$\frac{1}{2}mv^2$$

である。一方、天体の質量を $M$、半径を $R$ とすると、ニュートン力学に基づく、天体表面での万有引力の位置エネルギーは、

$$-\frac{GMm}{R}$$

である。打ち上げ速度 $v$ を脱出速度 $v_{esc}$ に置き換え、これらを等しいと置くと、

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 = \frac{GMm}{R}$$

となる。両辺から $m$ を消去し、2倍してルートを取ると、脱出速度として、

$$v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

が得られる（地球の場合、11.2km/sで、「第2宇宙速度」とも呼ばれる）。

**■数式コーナー：シュバルツシルト半径の導出■**

脱出速度 $v_{\mathrm{esc}}$ が光速 $c$ に等しくなる条件は、

$$v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = c$$

である。この両辺を2乗すると、そのような天体の半径 $R$ と質量 $M$ の間には、

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

という関係が成り立つことになる。

これが、ニュートン力学で求めた“ブラックホールの半径”であり、一般相対論で求めたブラックホールの半径「シュバルツシルト半径」と完全に一致する。このことは、やや誤解を引き起こしそうな点ではある。ニュートン力学の見積もりと一般相対論の結果が一致するのは不思議な感じがするだろう。

この一致は、ある意味では必然であり、ある意味では偶然である。まず、物理的な関係は、ニュートン力学でも一般相対論でも基本的には同じなので、万有引力定数 $G$ や光速 $c$ さらに質量 $M$ への依存性は、当然、同じ形になる。また、一般相対論の方がより正確ではあるものの、一般相対論の結果がニュートン力学の結果と10倍も100倍も違うわけではない。実際、一般相対論を使って太陽の重力が10倍も強くなったりしたら大変である。だから、ニュートン力学でも一般相対論でもオーダー（桁）が一致するのは必然なのである。ただしファクター（たとえば上の式の係数の2）まで一致するのは、この場合は偶然なのだ。ニュートン力学の計算と一般相対論の結果が、いつでもファクターまで一致するとは限らない。

## 5－2　重力と潮汐力

### 1）ニュートンの重力

この宇宙に存在するあらゆるモノは、すべてがお互いに引き合っている。この万物が有する引力のことを、ニュートンは「万有引力」と名づけた（図5・4）。ニュートンの「万有引力の法則」では、2つの物体の間の万有引力は、物体の質量が大きいほど大きく（＝万有引力はそれぞれの物体の質量の積に比例する）、また物体の間の距離が近いほど大きい（＝万有引力は物体の距離の2乗に反比例する）。そして、ニュートンの絶対時間・絶対空間の枠組みの中では、万有引力は“瞬時”に届くと考えられていた。そういう意味で、万有引力は、“遠隔作用”する力である。

万有引力の原因については不明だが、いったん万有引力を認めてしまえば、いろいろなことが一挙に理解できる。たとえば、地上の落ちるリンゴも天空に浮かぶ月も、共に、万有引力の法則の下にある。すなわち月は落ちてこないわけではなく、実は、地球へ向かってつねに落ち続けているのだ。もし、万有引

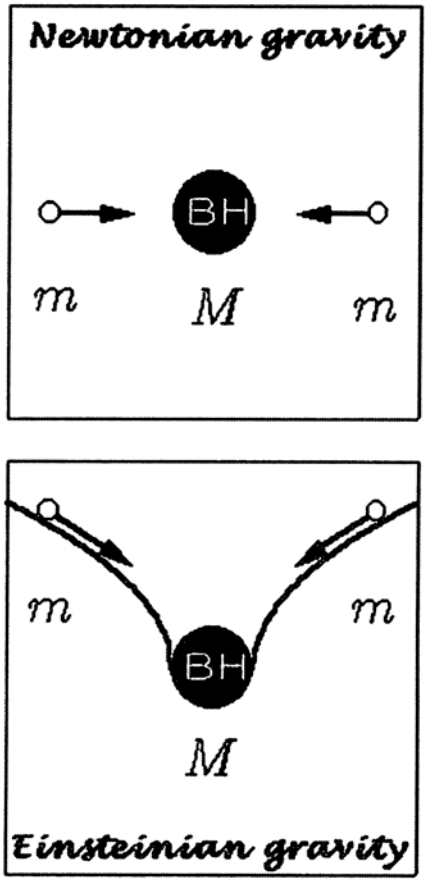


図5・4　それぞれの重力

力がなければ、慣性の法則で真っ直ぐに飛び続けていってしまうだろう。

万有引力は本来はとても小さな力である。たとえば、(正の電荷を帯びた) 陽子と (負の電荷を帯びた) 電子の間には、万有引力に加え電気的な力も働く。このとき、陽子と電子の間の万有引力は、陽子と電子の間の電気的な引力に比べて無視できる ($10^{49}$分の1ぐらいにすぎない)。しかし物体のサイズが大きくなると、プラスとマイナスの電荷は全体として打ち消し合ってしまうので、全体的には万有引力だけが残り、地球などの天体になると、万有引力はとても大きな力になる (表5・3)。

なお、地球のような天体が他の物体を引きつけるときには、万有引力のことを「重力」と呼ぶこともある。惑星がきれいな軌道を描けるのも、地上の物体が地球上にとどまっていられるのも、重力の働きのおかげだ。また、“単位質量あたりに働く重力” を「重力加速度」と呼ぶ。

### 2) アインシュタインの重力

一般相対論では、重力の作用を空間の幾何学に置き換えた。すなわち、一般相対論の考え方では、まず、質量の存在は周囲の空間を歪め、その空間の歪みが遠方に伝わって他の物体に影響をおよぼす。その影響こそが重力なのである (図5・4)。したがって、一般相対論における重力は、“近接作用” する力である。また空間の歪み (重力の作用) は、光速で伝わると考えられている。

ところで、一般相対論でも、空間が曲がっている理由については、万有引力の法則と同様、説明できない。ニュートンの万有引力の法則にせよ、アインシュタインの一般相対論にせよ、ともに説明不可能な基本原理－公理と呼んでもよい－から理論は構築されている。じゃぁ、どちらの理論がいいのだろうか？

よりよい理論の基準は明らかだ。まず第一に自然をより上手く説明できること (そういう意味では、正しい理論というモノはなく、つねに、よりよい理論があるだけかもしれない)。そして第二に美しいことだ。万有引力の理論も美しい理論ではあるが、一般相対論の方が、すなわち時空の幾何学で重力作用を表す方が、より美しく自然とも調和している理論だと考えられているのである。

実際、ニュートンの重力 (N) とアインシュタインの重力 (GR) を比べてみると、一般相対論の重力の方が強い (図5・5)。そしてその違いは、さまざまな実験によって検証できる程度には大きなものであり、一般相対論の重力の方がより正しいことが実証されている。さらに重力場の中心に近づくほど、この違い

表5・3　表面重力と重力加速度と潮汐加速度
(身長2mで体重60kgの人にかかる値)

| 天　体 | 表面重力 [N=kg m/s$^2$] | 表面重力加速度 [m/s$^2$] | 潮汐加速度 [m/s$^2$] |
|---|---|---|---|
| 地　球 | 590 | 9.8 (＝1G) | 0.000012 |
| 太　陽 | 16400 | 274 | 0.00000313 |
| 白色矮星 | $8.0 \times 10^7$ | $1.3 \times 10^6$ | 1.06 |
| 中性子星 | $1.6 \times 10^{14}$ | $2.7 \times 10^{12}$ | $2.1 \times 10^9$ |
| 恒星ブラックホール | $8.9 \times 10^{13}$ | $1.5 \times 10^{12}$ | $3.9 \times 10^8$ |
| 巨大ブラックホール | $3.5 \times 10^7$ | $5.9 \times 10^5$ | $3.2 \times 10^{-5}$ |

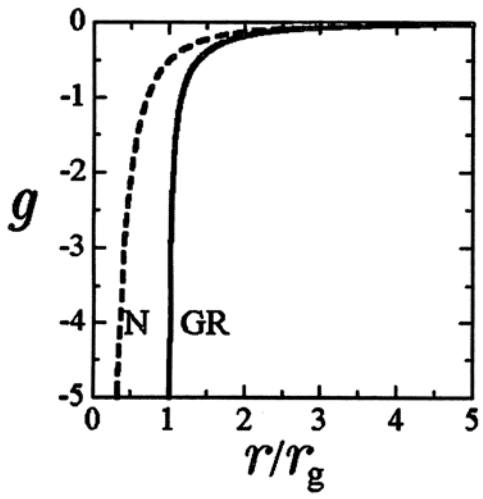


図5・5　重力加速度 $g$ の違い

は大きくなる。この差異こそが、ブラックホールの原因でもあるわけだ。

### 3）潮汐力

重力と切っても切り離せない重要な概念が潮汐力である。重力の強さは天体からの距離によって異なるため、物体が大きさをもっていると物体の各点にかかる重力には違いが出てくる。この物体の各部分にかかる重力の“残差”が「潮汐力」である（図5・6、表5・3）。潮汐力の名前のもととなっている地球潮汐は、月や太陽が地球海洋におよぼす重力が、表面の場所によって違うために起こっている。

重力を平らな空間における遠隔作用と考えるニュートン力学では、“力の差（引き算）”として、潮汐力を捉える。それに対して、重力を曲がった空間における近接作用として考えるアインシュタインの一般相対論では、潮汐力は空間のひずみそのものである。空間が曲がっている限り、空間内の物体は、空間という入れ物に合わせて自分自身を歪めざるを得ない。このストレスが潮汐力なのである。

また、潮汐力に関して、もう一つ非常に重要な点は、“潮汐力は消去できない”ということだ。天体に自由落下しているシステムでは、無重力状態になっていて、質量のない宇宙空間で静止したシステムと等価であった。このことを指して、“（等価原理によって）重力は消去できる”ということがある。ところが潮汐力に関してはそうはいかない。物体に大きさがあると、各部分での重力の差が残るからだ。

第4回で紹介したエレベータの思考実験を思い出して欲しい。天体に自由落下しているエレベータの中で、2つの点を考えると、それぞれの点が自由落下するために、エレベータの中から観測していると、2つの点が近づくようにみえるだろう。本当に重力場のない宇宙空間ではこんなことは起こらない。すなわち、等価原理によって重力が消去できるのは、あくまでも物体の重心という一点だけにおいてである。その意味では、より正確には、等価原理によって、“局所的”に重力が消去できる、といわなければならない。物体が大き

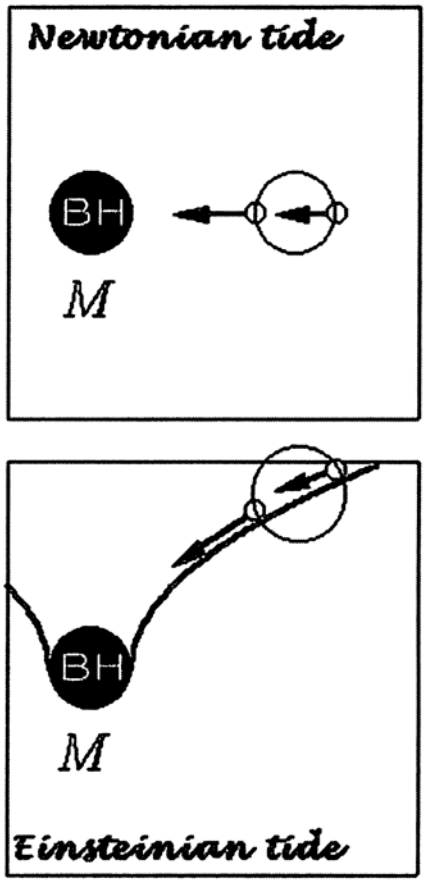


図5・6　それぞれの潮汐力

さをもっているときに存在する潮汐力は、決して消去できないのである。

### 5－3　重力エネルギー

#### 1）位置エネルギーと重力ポテンシャル

転ぶと痛いし、高いところから落ちると怪我をする。これは子どもでも知っている自然界の法則だ。高いところと低いところとの差（「落差」）が、人や物に何らかの作用をおよぼし、しかも落差が大きいほどその影響も強いと考えられる。この落差に蓄えられている作用能力のことを、ある種のエネルギーとみなして、高さの違いによるエネルギーであることから、「位置エネルギー」と呼んでいるわけだ。

この位置エネルギーは、重力加速度が一定とみなせる地上付近では、落下する物体の質量と落差の積に比例している。しかし、天体からの距離が大きくなると、重力加速度が一定とみなせなくなる。そのような一般的な場合には、位置エネルギーは、物体の質量に比例し、天体からの距離に反比例する。

位置エネルギーの原因は重力にあるので、より一般的には、位置エネルギーのことを「重力エネルギー」と呼ぶ（文字では、$E$や$U$で表すことが多い）。また、“単位質量あたりの重力エネルギー”のことを、「重力ポテンシャル」と呼び、$\phi$（ファイ）や$\psi$（プサイ）で表す。“ポテンシャル”というのは、もともと“潜んで存在する能力”の意味だが、重力場の中に潜在するという点からは、単位質量あたりの重力エネルギーを重力ポテンシャルと呼ぶのはピッタリの呼び方である。名前が似通っていて非常に紛らわしいが、重力（重力加速度）と重力エネルギー（重力ポテンシャル）は、違う概念ではあるものの、密接な関係がある。

容易にわかるように、水平な2点の間には重力エネルギーはない。重力エネルギーが蓄えられるために必要なのは、あくまでも“重力の方向の”落差である。そして重力に逆らってモノを持ち上げれば、重力エネルギーを稼ぐことができる。一方、その逆に、重力エネルギー（あるいは重力ポテンシャル）に差がなければ、そこには力は働かない。しかし、差があれば、より正確には勾配があれば、そこには重力が働いている（図5・7）。

#### 2）相対論的な効果

重力ポテンシャルは、重力という力によってモノを引き寄せ溜める“器”のようなものである。一般相対論でいう曲がった空間とは、質的に異なるものではあるが、イメージ的には非常に近しいものがある。というか、ニュートン力学における重力ポテンシャルは、モノゴトを捉えるのに便利な、あくまでも仮想的な“器”だったのだが、曲がった時空の立場では、ポテンシャルはより実在に近い存在になったといえる（図5・7）。

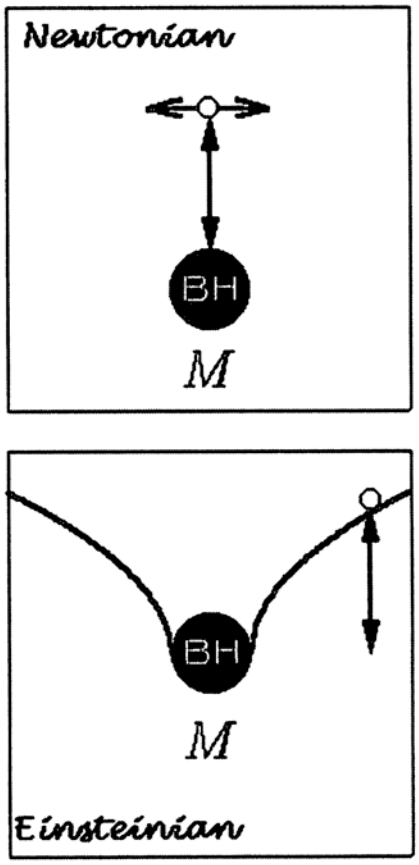


図5・7　それぞれの重力エネルギー

さて、ニュートンの重力よりも一般相対論的な重力の方が少し強かったように、重力ポテンシャルについても、一般相対論の方が少し強い（図5・8）。ポテンシャルという“器”が少し深くなった状態だと考えればよい。そして重力場が非常に強くなった極限が、“器”の底が抜けた状態で、ブラックホールなのだといえるだろう。

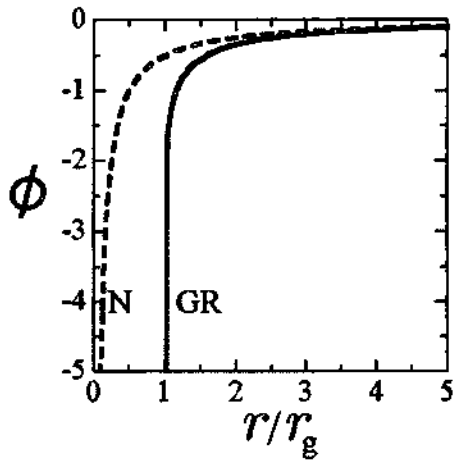


図5・8　重力ポテンシャル$\phi$の違い。ニュートン力学（N)の場合より一般相対論（GR)の方が、ポテンシャルはより深く急峻になる。さらに、ニュートン力学では中心で発散するが、一般相対論ではシュバルツシルト半径で無限大に発散する。