

連載

最新宇宙誌【16】

エポックⅣ：星と銀河の形成

～構造形成の時代（後編3）～

福江 純（大阪教育大学）

7. 3Kの音響パターンとバリオン振動

このエポックー構造形成の時代ーに関する最後の問題として、3K 宇宙背景放射の微細なパターンに刻まれた初期宇宙の音色について、説明を試みよう。

7.0 COBE、WMAPの復習

いわゆる 3K 宇宙背景放射について、その歴史的発見の経緯と宇宙論における重要性、最近の COBE 衛星や WMAP 衛星の成果まで、【エポック 2】の 6.1 節で詳述した。

すなわち、現在の宇宙のあらゆる空間には、非常に低エネルギーの光子（マイクロ波放射）が飛び回っていて、その光子のスペクトルが絶対温度で 3 度（正確には 2.728 K）の黒体放射スペクトルに非常に近いことから、これを「3K 宇宙背景放射」と呼んでいる。

これらの光子には、場所による偏りがなく（一様）、また方向による偏りもない（等方）。しかし、平均からの「ゆらぎ」は存在する。そのゆらぎの振幅と揺らぎ分布を精密測定したのが、COBE 衛星と WMAP 衛星であった（図 53）。

図 53 にあるように、ほとんど一様で均質な 3K 宇宙背景放射には、平均からのずれ（ゆらぎ）がほんのわずかが存在する。まず COBE 衛星が発見したのは、このずれが強度比で約 10 万分の 1 程度であることだった。この程度の振幅のゆらぎがあれば、銀河や銀河団などその後の宇宙構造のタネになるには十分な強さであった。COBE 衛星は分解能がよくなかったが、WMAP 衛星は分解能が格段に向上して、ゆらぎの大きさ（揺

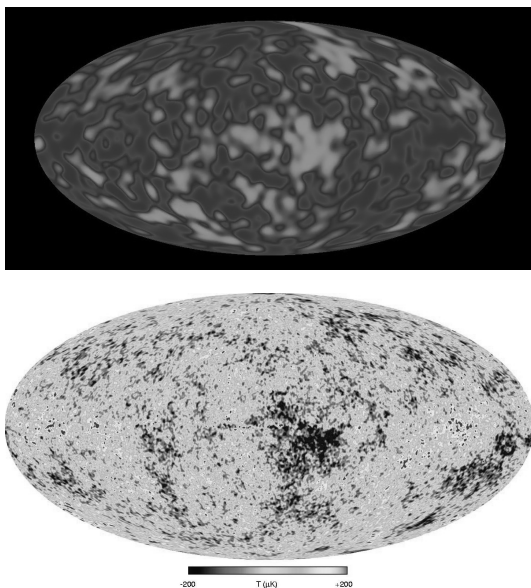


図 53 COBE 衛星の見た 3K 宇宙背景放射のゆらぎ（上）と WMAP 衛星の見た 3K 宇宙背景放射のゆらぎ（下）

がり）の分布を調べることができた。【エポック 2】では、以下のように書いている。

とはいえ、図 43 に見るように、非常に微細なムラムラがたくさん見えてきた。これは宇宙の晴れ上がりの時期に、宇宙全体を駆けめぐる音波のパターン、あるいは、宇宙という太鼓の表面の振動パターンである。そしてこのパターンの解析から、標準ビッグバンモデルの正しさや宇宙の年齢が 137 億歳であることなど宇宙論の基本パラメータが決定できたのだが、それについて詳しくは、エポック 4 の構造形成で触れられる予定である（いまはまだ不勉強で

説明できない)。

……と書いて、もう 2 年ぐらい経ったが、いまだにそれほど勉強できてるわけではなくて、上手く説明できるやらどうやら(笑)。大ざっぱに言えば、図 53 下の微細なデータから、大きいサイズのゆらぎや小さいサイズのゆらぎの分布を分析して、「パワースペクトル」というものを作成し、理論的なモデル曲線と比較して、宇宙論モデルのパラメータを決めるわけだが、2 次元だし時間的な変化もあるし、なかなか説明が一筋縄ではいかないようだ。とりあえず、きわめて単純な例からはじめてみたい。

7.1 音色と波形分析

ごく身近な音波パターンとして、声や楽器などの音（音波）の分析から考えてみよう。

たとえば、音声の時間的な変化をグラフにしてみると、それぞれの音によって複雑な波形を描く（図 54）。もちろん、同じ“あ”でも、個人差があって（「声紋」と呼ばれている）、少しずつ違うが。

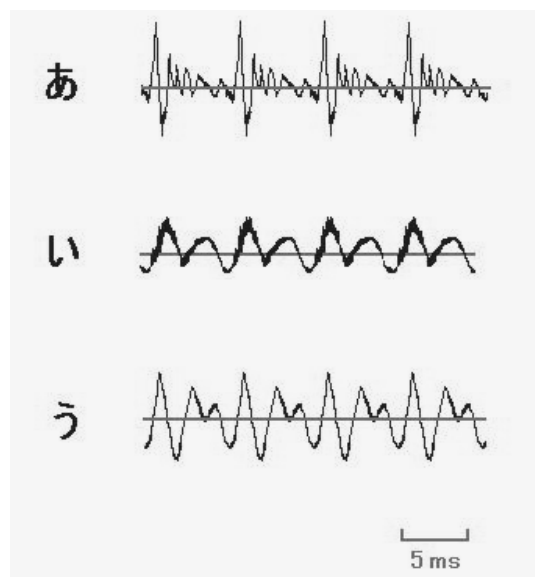


図 54 音声の波形

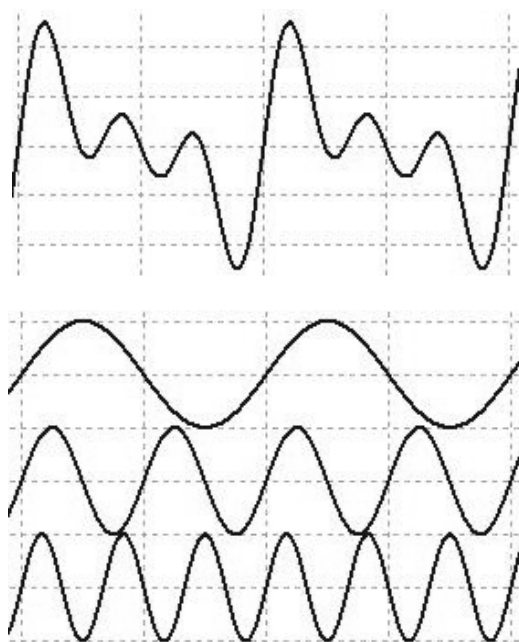


図 55 波形の分解と合成

音声に限らず、一般に音の波形は複雑で、その複雑な波形が楽器の妙なる音色（や耐えがたい不協和音）などを形作っている。しかし、どんなに複雑な波形も、単純な波形、具体的にはサイン型（三角関数型）の波形の重ね合わせで表すことができる（図 55）。たとえば、図 55 の上の波形は、下の三つのサイン型の波形に分解できるし、逆に、下の三つのサイン型の波形を合成すれば、上の波形を再現できる。重要なのは、“どんなに”複雑な波形でも数多くの（さらに無数の）三角関数の足し合わせで再現できるという点だ。それならば、最初から、無限個の三角関数（ $\sin$ と $\cos$ ）を級数に並べておいて、もとの波形が再現できるように、その係数（振幅）の値を各項ごとに調整してやればいいだろう。これが、いわゆる「フーリエ級数展開」と呼ばれる手法だ。

一応、式を書いておくと、時間 t の周期巻数（周期 T_0 ）を $x(t)$ とすると、フーリエ級数展開は、整数の指数 n が 1 から ∞ までの和と

して、以下の式で表せる（表現には何通りもある）。

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

ここで ω_0 は、周期 T_0 の「基本振動」に対応する「(基本)角振動数」で、基本振動の周期 T_0 、基本振動に対応する基本振動数(周波数) f_0 、基本角振動数 ω_0 の間には、

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi / T_0$$

の関係が成り立つ。

したがって、指数 n が1のときが基本振動に対応する周期の三角関数になり、 $n=2$ のときは倍振動となり、一般には T_0 の整数倍(n 倍)の周期をもつ $\sin$ と $\cos$ の重ね合わせになっている。

また係数の a_n 、 b_n は、三角関数の振幅なので、もとの周期関数 $x(t)$ に含まれる $\sin$ や $\cos$ の各成分(n 倍目)の大きさを表している。そして、もとの周期関数 $x(t)$ を使えば、 a_n と b_n の値は決定できる。

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

ここで少し用語として、「倍音(高調波)」を出しておく。たとえば、ギターの弦を開放で弾くのと、弦の真ん中を軽く押さえて弾くのとでは、出てくる音の高さが2倍だけ違う(もちろん短い方が音が高くなる)。ピアノの鍵盤では、ドと次のドでは、やはり弦の長さが半分になっている。縦笛では空いている穴を指で塞ぐことによって、音の高さが変わる。

振動部分の長さを変えて音の高さを変化させている点は、弦楽器も管楽器も同じである。

音階における「1オクターブ」の違いは、音の周波数(振動数)や波長では、ちょうど倍(半分)だけ違うことに対応している。たとえば、通常のドは262Hzで、一つ上のドは523Hzになる。ちなみに、この1オクターブの間を等比級数的に12の半音に分割したのが、いわゆる「バッハの平均律」だ。バッハの平均律では、一つの半音あたり、 $2^{(1/12)}$ = 約1.0595倍だけ振動数が違う。

さてここで、両端が開放端(自由端)である管の中で定在振動する音波の場合を考えてみよう(図56上の右列)。このとき、もっと

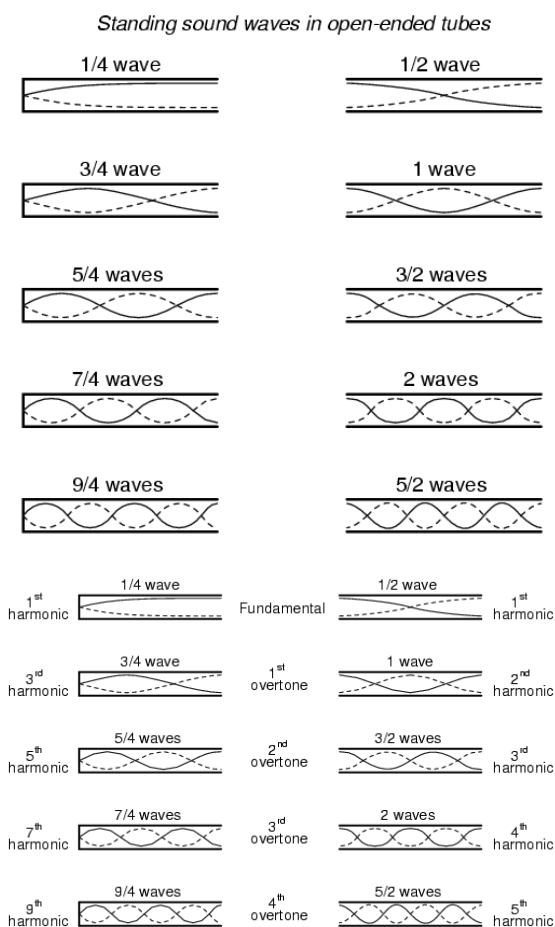


図56 開放端をもつ管内の音波

も低い振動数である「基本振動」の波長は管の両端がもっとも振動する「腹」（中央が振動しない「節（node）」）になるため本来の波の $1/2$ 波長分しかない。つぎの振動は管全体でちょうど 1 波長取れるので、基本振動の波長の $1/2$ になり、音の高さ（振動数）は倍になる。そのつぎは $3/2$ 波長取れて、基本振動の波長の $1/3$ となり、3 倍音になる。

このように端（自由端でも固定端でもいい）をもつ管など、有限の領域に閉じ込められた音波（波動）は、一般に、最低の振動数をもった基本振動と、その高調波（倍音）が、跳び跳びの定在波として存在することになる。余談だが、水素のエネルギー準位も似ていて、こちらは量子論的な理由で、跳び跳びの定常状態となっている。また水素の場合は、基底状態と励起状態と呼んでいる。

なお、おまけだが、倍音・高調波 (harmonic) と倍音・上音 (overtone) は、いままで似たようなものだと思っていて、あまり区別して使ったことがなかった。しかし、ネットから拾ってきた図 56（下）をみると、どうも少し定義が異なるようだ。うーん、ギター弦のハーモニクスとか、降着円盤の振動なんかをやっていた割に、基本振動が抜けていた感じである。

も一つ、おまけに、ネットから拾ってきた、「あ」の音声を倍音に分解したものを図 57

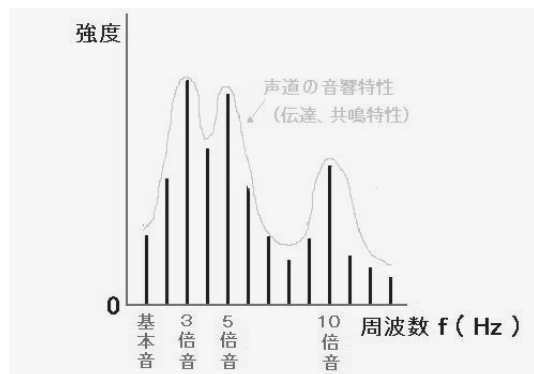


図 57 “あ”の音声の分解

に示しておく。

7.2 太鼓と 2 次元の振動パターン

ずいぶん前のことだが、ヴァイオリンの表面に浮かび上がる美しい音響パターンに感動したことがある（図 58、図 59）。これを発見した物理学者エルンスト・クラドニ (Ernst Chladni; 1756~1827) にちなんで、クラドニ図形（クラドニパターン）と呼ばれているものだ。周囲が複雑な曲線で囲まれたヴァイオリンやギターだとかなり複雑なパターンになるが、周囲が単純な直線（曲線）で囲まれた正方形の板や円形の板の場合は、クラドニ図形ははるかにシンプルなものになる（図 60、図 61）。



図 58 ヴァイオリンのクラドニ図形

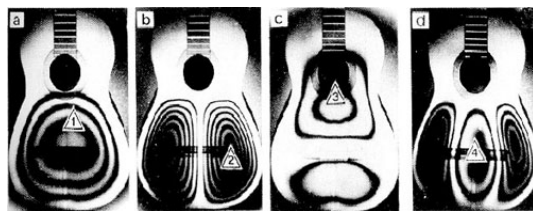


図 59 ギターのクラドニ図形

クラドニ図形は、1 次元の弦や管内で起こる定在音波振動を、2 次元の面に拡張したものである。平面上のどこかを固定したり（そ

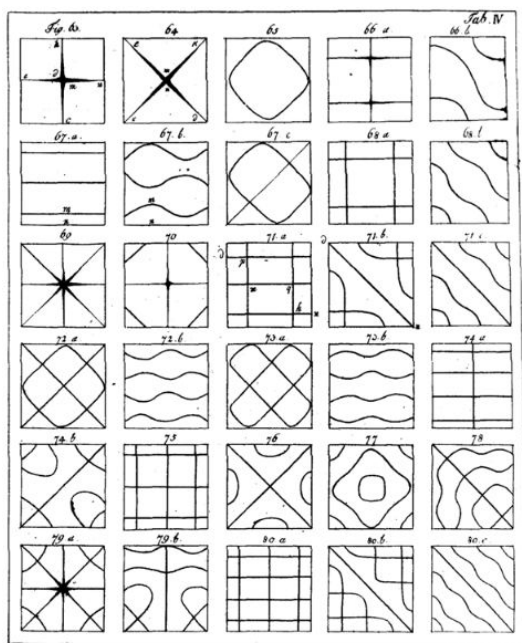


図 60 正方形の板のクラドニ図形

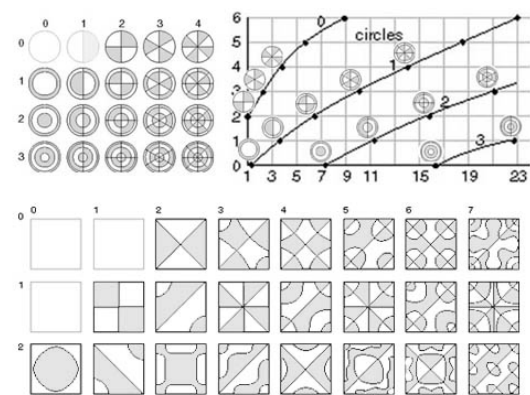
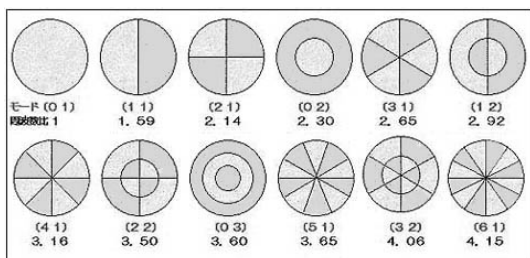


図 61 中央を固定した円形板と正方形板のクラドニ図形

こは自動的に振動の節になる)、自由にしたりした境界条件のもとで生じる、その平面の定在波振動（固有振動）を表している。

具体的な例として、中央を固定して周囲を自由にした正方形板の場合、中央はかならず振動の節（振動しない場所）になる。しかし、弦の振動と異なって、節は1点ではなく、中央を通る直線の線上が節になったりする（したがって、節というより「節線」と呼ぼう）。たとえば、一番単純な振動モード（図 60 の左上のパターン）だと、中央を通る縦の直線と横の直線が節線になる。このように、2次元平面の定在波振動では、一般に節は線上になり、かつその自由度が2方向ある。

一応、数式も少し書いておくと、正方形（長方形）の板の場合、横方向（長さ a ）を x 、縦方向（長さ b ）を y とし、 m や n を整数として、

長方形の場合：

$$u_{m,n}(x, y, t) = A_{m,n} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \times \cos(\omega_{m,n}t + \delta_{m,n})$$

正方形の場合：

$$u(x, y, t) = A_{m,n} \left\{ \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y + \lambda \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{a} y \right\} \cos(\omega_{m,n}t + \delta_{m,n})$$

のような式で表すことができる。こんな式はぼくもすぐに導出できるわけではなくて、ネットから解を拾ってきたが、一見複雑そうにみえても、実は $\sin$ と $\cos$ しか出てこない点に注目して欲しい。弦などのような1次元の振動とは異なり、2次元面の振動なので、空間成分（ x や y が入った項）は $\sin$ の積になってはいる（時間は1次元なので時間成分は $\cos$ だけ）。しかしそれでも、 $\sin$ と $\cos$ だけで表せているという意味では、振動（とくに振幅の小さい微小振動）を表す数式は高校生レベルの数学で十分なので、思いの外に簡単だともいえる。

……つづく……

福江 純（大阪教育大学）