

コラム ボーデの法則の導出について

編集委員長 作花一志

ボーデの法則とは太陽から惑星までの平均距離 a_n が次の数列に従うというものである。

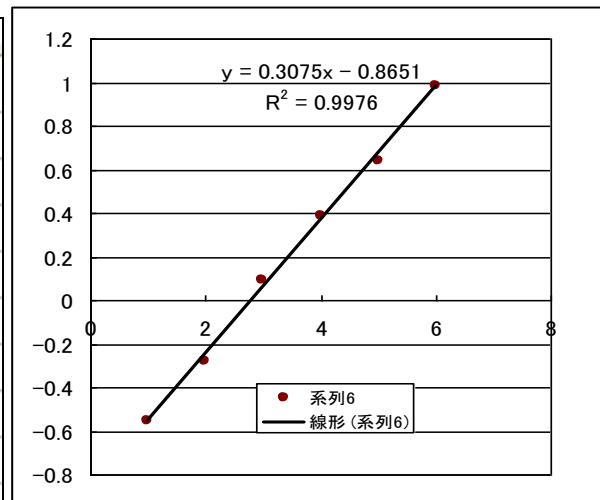
$$a_n = 0.4 + 0.3 \times 2^n$$

この式は水星から天王星までにはよくフィットし、小惑星ケレスの発見（1801年）には役立ったが海王星より先は合わなくなった。この数列はどのように導かれたものか、数列は習う立場でも教える立場でもいやなものだが、ややこしいときには階差をとって対数をとって…というのが定石なので、式の形も考えずにやってみよう。

惑星番号（B列）としては金星に 0、地球に 1、ケレスに 3、天王星に 6 を当てる。なお水星には $-\infty$ を当てる。各惑星の平均距離（C列）の差（D列）をとり、さらにその対数（E列）を計算する。そしてB列とE列の値を散布図にプロットすると直線状に並ぶ。最小二乗法で、というより点を右クリックすればすぐに求まるが、近似直線と R^2 値（相関係数の 2 乗）をも記入してみると、もっともらしい図ができる。

水星の a_n を含めた場合、 R^2 値は 0.95 だが、含めない場合には 0.99 とウソ～と言いたくなる（右図）。さて、この直線の勾配と切片が得られた後は高校数学の練習問題で E 列は公差 0.3075 の等差数列であり、対数を真数に戻すと D 列は 0.136×2.030^n となり、C 列の近似数列は $0.397 + 0.336 \times 2.030^n$ と求めることができた。

	A	B	C	D	E
1	惑星名	n	a_n	階差	前列の対数
2	水星	$-\infty$	0.387		
3	金星	0	0.723	0.336	-0.4737
4	地球	1	1.000	0.277	-0.5575
5	火星	2	1.524	0.524	-0.2807
6	ケレス	3	2.767	1.243	0.0945
7	木星	4	5.203	2.436	0.3867
8	土星	5	9.555	4.352	0.6387
9	天王星	6	19.213	9.658	0.9849
10					



今さらボーデの法則の導出でもないが、Excel を使うデータ分析の演習問題には適切だろう。