連載

PC 天文教材【2】

ケプラーの法則の理解

作花　一志（京都情報大学院大学）

1. ケプラーの法則

天文屋ならだれでも知っているケプラーの法則だが、これをきちんと説明するのは非常に難しい。

Ⅰ）惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描く。

Ⅱ）太陽と惑星を結ぶ線分と楕円の長軸とでできる扇形の面積速度は一定である。

Ⅲ）どんな惑星でも公転周期の2乗と軌道長半径の3乗の比は一定である。

という文章だけで内容を理解することは無理に近いし、この件を暗記してもほとんど無意味である。

まず，第1法則において楕円とは

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

という式で表される曲線というより「円をある一方向だけに圧縮したもの」と考えたほうがわかりやすい。半径 a の円を y 方向だけに b/a 倍すると長半径 a、短半径 b の楕円が得られる。楕円の形は a と b という代わりに、a と離心率 $e=\sqrt{(a^2-b^2)}/a$ とで特徴づけられるとする（図1）。

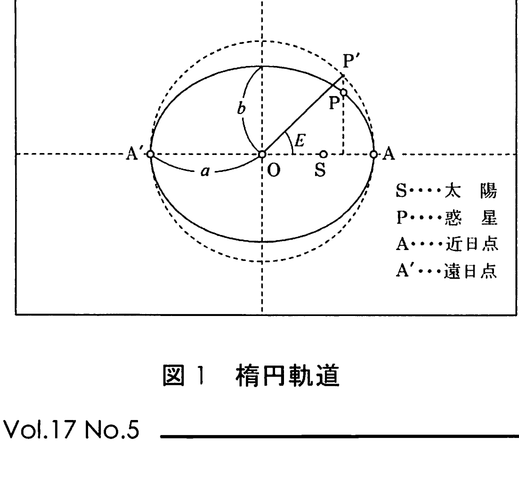

図1　楕円軌道

e は0以上1より小さい値をとり、0のときには円を、1に近くなればなるほど扁平な楕円を表すことは容易にわかる。楕円の焦点は（$\pm ae$,0）であり、第1法則より太陽は一つの焦点S（ae,0）に、惑星は楕円上P（X,Y）に位置している。原点を中心とし半径 a の円を描き、その円周上にP'を図のように定めて∠P'OA=E を離心近点角という。

$$X = a\cos E \quad (1)$$

$$Y = b\sin E$$
$$= a\sqrt{(1-e^2)}\sin E \quad (2)$$

すると太陽惑星間距離SPは

$$r = \sqrt{(X-ae)^2 + Y^2}$$
$$= a(1-e\cos E) \quad (3)$$

と書ける。r の最大値、最小値は次のように与えられる。

最小値　a（$1-e$）　$E=0^\circ$

…PがAに一致するとき

最大値　a（$1+e$）　$E=180^\circ$

…PがA'に一致するとき

Aを近日点、A'を遠日点と呼ぶ訳は自明であろう。a は r の最大値と最小値の平均となるので平均距離とも言われる。

惑星が楕円上をどのように運動し、いつどこにいるか次のケプラーの方程式（4）で与えられる。これは第2法則「面積速度は一定」から得られるが、その導出にはかなりの忍耐力が要る。純力学的な表現では「角運動量が保存されている」となる。

$$E - e\sin E = M \quad (4)$$

$$M = nt \quad (5)$$

Mは平均近点離角と言われ、近日点通過時からの経過日数tに比例し、近日点通過時に0、遠日点通過時にπとなる。ケプラーの方程式の解は

$$y = e\sin x$$
$$y = x - M$$

の交点であり、$0 \leqq e < 1$ であるから必ず解は1個だけ存在する。しかし解析的には解けないので、M（ラジアン）とeを与えて数値的に解くわけだ。求まったEを(1)、(2)に代入してX、Yが求まり、その時の惑星の位置が得られる。

第1、第2法則は1つの惑星についてであるが第3法則は複数個の惑星についての記述である。公転周期pと平均距離aの関係は

$$a^3 = GMp^2/4\pi^2 \qquad (6)$$

Mは太陽と惑星の質量和であるが太陽の質量として差し支えない。p, a, Mの単位を年、天文単位、太陽質量とすると、第3法則は次のように非常に簡単に表される。

$$a^3 = p^2$$

(5)の比例定数nは平均日々運動といわれ惑星が1日当たり公転運動する角度で平均角速度に当たる。

$$n = 360/(365.24219\,p)$$
$$= 0.985647365a^{-1.5}$$

と書ける。太陽に近い惑星ほどnは大きく、速く公転している。

2. 例題と解法

ではこれらをパソコンで実習してみようといっても，まず楕円を描くことからして大変である。(1)、(2)においてaとeの数値を与えて(X, Y)をプロットすればいいのだがExcelでやろうとすると楕円の形は正確ではない。ケプラーの方程式(4)の解法は数値計算の初歩的な演習問題で、Excelで解けるが、その後のグラフ描画は大変だ。それならいっそ全部を満たすプログラムを作ればいいのだが、長時間の試行錯誤を覚悟しなければならない。そこで筆者のサイト[1]に実行ファイルを用意した。必要に応じてダウンロードしてお使いいただきたい。3つの法則をビジュアルに理解しようというもので、図2は第2法則についての図説である。惑星（楕円上の大きい丸印）は、太陽に近いときは速く、遠いときはゆっくりと軌道上を運動する。

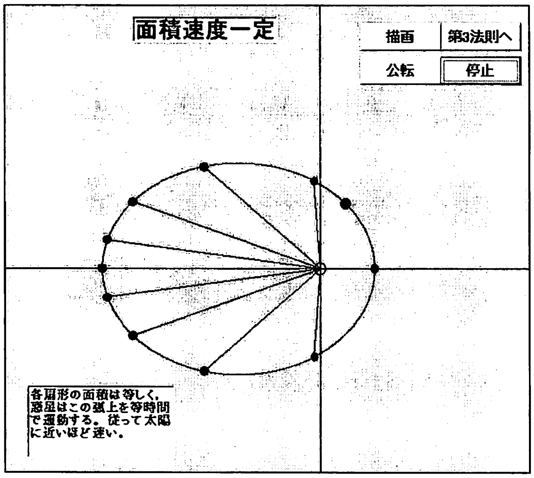

図2　ケプラーの第2法則

ここではExcelでできる2つの例題を解いてみよう。

例1：今年元日の地球太陽間距離を求めよ。また今年の近日点通過日と遠日点通過日を求めよ。

理科年表によると地球の軌道要素は$a=1$、$e=0.0167$であり2005年8月18.0日において$M=223.429°$である。1月1日は229日前であるから、元日では$M=-2.284°$となる（図3）。なお時刻はUT＝0h すなわち JST＝9h における値である。

このMをラジアンに変換（関数 radians）して(4)を解くと$E=-0.04054$　であり、X

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3		年	月	日	曜		日数	M	
4		2005	8	18	木	から		223.43	
5		2005	1	1	土	まで	−229	−2.284	
6									
7									
8		=DATE(B5,C5,D5)−DATE(B4,C4,D4)							
9									
10						=0.985647365*G5+H4			
11									
12									

図3　Mの算出

＝0.982478183、Y＝－0.040527772、r＝0.983313724 が得られる（表 1)。

Mの値が 0 に近いので，元日に地球は近日点の近傍にいるはずだ。図 3 のシートにおいて 1 月 3 日には M=－0.313°で、1 月 4 日には M=0.0117°であるから近日点通過日は 1 月 4 日であることがわかる。同様にして M=180°となる日を探すと、遠日点通過日は 7 月 5 日であることがわかる。

表 1　ケプラーの方程式の解

		e=	0.0167
		M=	−0.03987
x1	f	f'	x2
			−0.03987
−0.03987	0.000666	0.983313	−0.04053
−0.04053	1.11E−05	0.983314	−0.04054
−0.04054	1.85E−07	0.983314	−0.04054
−0.04054	3.09E−09	0.983314	−0.04054
−0.04054	5.16E−11	0.983314	−0.04054
−0.04054	8.61E−13	0.983314	−0.04054
−0.04054	1.44E−14	0.983314	−0.04054
−0.04054	2.36E−16	0.983314	−0.04054
−0.04054	0	0.983314	−0.04054
−0.04054	0	0.983314	−0.04054
X	Y	r	
0.982478	−0.04053	0.983314	

ニュートン法を用いて
$x2 = x1 - f(x1)/f'(x1)$ と計算した。

$$f(x) = x - e\sin x + M$$

$$f'(x) = 1 - e\cos x$$

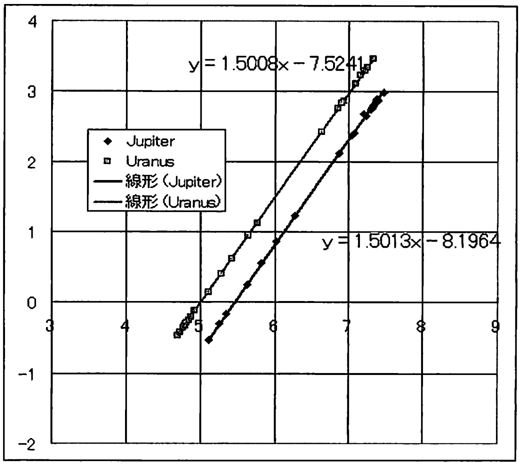

図 4　木星と天王星の衛星の軌道長半径と公転周期の関係（対数）

> **例 2: 木星と天王星の衛星の軌道長半径と公転周期の対数グラフを描け。それぞれ直線状に並ぶが、その勾配と切片の意味を考察せよ。**

[2]に載っている木星 62 個、天王星 24 個の衛星の a (km)と p (day)のデータを使いその対数をプロットした（図 4)。点列が直線状に並ぶということは

$$p = C \times a^{\alpha}$$

ということを意味する。α はこの直線の傾きで 1.5 であり第 3 法則と一致する。C は縦軸の切片であるが、(6) より $C = 2\pi/\sqrt{GM}$ なので、両惑星の $1/C^2$ の比は質量比となる。実際に

$C = 10^{-8.1964} = 6.36209 \times 10^{-9}$（木星）

$C = 10^{-7.5241} = 2.99158 \times 10^{-8}$（天王星）

であり、両惑星の $1/C^2$ の比は 0.045 となり質量比と一致している。このようにして、火星から海王星までの質量比が求まる。

参考文献

[1] 作花一志
http://www.kcg.ac.jp/kcg/sakka/uchu/c/sample/kepler.exe

[2] JPL　http://ssd.jpl.nasa.gov/