連載 隣のブラックホール【6】

ブラックホールの力学

福江　純（大阪教育大学）

今回は、ブラックホールのまわりにおける物体の運動について紹介する。具体的には、ブラックホールの中心に向けて落下する自由落下運動、ブラックホールのまわりを円軌道を描いて運動する円運動、そして太陽系内の惑星や彗星の軌道のような楕円軌道的な運動について、ニュートン力学と比較しながら説明しよう。

6－1　自由落下運動

1）ニュートン力学での自由落下

地上から1mの高さでリンゴを持っているとき、その手を離せばリンゴは落下する。リンゴの場所が高度1万mでも1万kmでも同じである。地球のまわりの軌道運動や空気の影響を考えなければ、地球の周辺の重力場の中で静止していた物体は、支えをなくすと、地球の重力に引かれて地球の中心に向かって落下する（図6・1）。これが一番単純な「自由落下運動」である（投げ上げた物体の運動や人工衛星のような軌道運動している物体の運動も、等価原理の観点からは、広い意味での自由落下運動である）。

2）相対論的な効果

ではブラックホールの場合の自由落下運動はどうなるだろうか。前に述べたように、ニュートン力学の場合と比べると、相対論的な効果によって、重力はより強く（ポテンシャルの勾配はより急峻になる）、また重力ポテンシャルはより深くなる。しかしながら、軌道運動などのない単純な落下運動の場合は、ポテンシャルの形自体はニュートンで

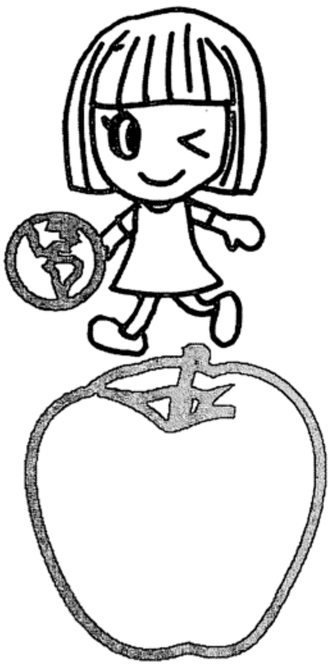

図6・1　落ちるのは、リンゴ？　それとも…

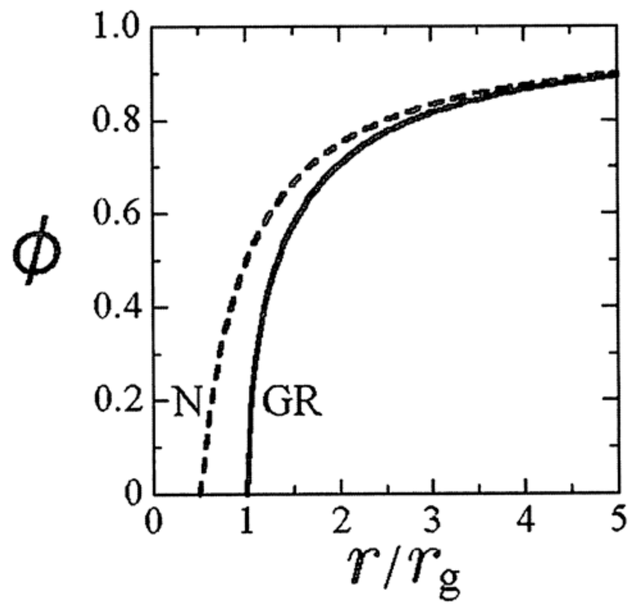

図6・2　静止質量エネルギーまで含めた重力ポテンシャル（N：ニュートン／GR：一般相対論）。

もアインシュタインでも似たような形をしている（図6・2）。そのため、自由落下の仕方も定性的には似たようなものになる。すなわち、最初静止していた物体がブラックホールに落下を始めると、だんだん落下速度は大きくなり、ついにはブラックホールのシュバルツシルト半径に突入するだろう（図6・3）。

もちろん定量的・数値的には、ブラックホールへの自由落下はニュートンの場合とは違ってくる。たとえば、落下するにつれて落下速度は増加するが、落下速度が光速を超えることは決してない。実際、ニュートン力学では落下速度は中心で無限大に発散するが、ブラックホールへの自由落下の場合、落下速度はシュバルツシルト半径で光速になる。光速以上でも以下でもなく、シュバルツシルト半径で、必ず光速に達するのである。これはシュバルツシルト半径での脱出速度が光速に等しいことの裏返しなのだ。

またブラックホールへの自由落下では、重力場による時間の遅れが生じるので、時間と距離の関係も修正を受ける。実際、自由落下している物体の距離ｒを無限遠での座標時間ｔと自由落下する物体の固有時間τの関数として表してみると、その違いが顕著に現れる（図6・4）。すなわち、固有時間τで考える限り、物体は有限の時間のうちにシュバルツシルト半径を通り過ぎ、さらには中心まで到達する。これはニュートン力学の自由落下と同じである。しかし座標時間ｔで見ていると、物体は次第にシュバルツシルト半径に近づくが、いつまで経ってもシュバルツシルト半径を超えることはできず、事象の地平面で永久に凍りつくように見えるのだ。

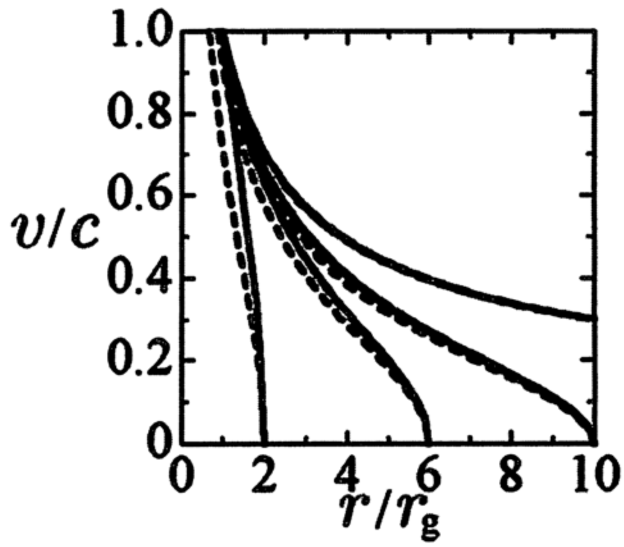

図6・3　ブラックホールへの自由落下の落下速度（破線はニュートン力学、実線は一般相対論）。横軸はシュバルツシルト半径ｒｇで表した中心からの距離ｒ、縦軸は光速ｃを単位とした落下速度ｖ。相対論的な効果を入れて計算すると、シュバルツシルト半径で落下速度は光速になる。

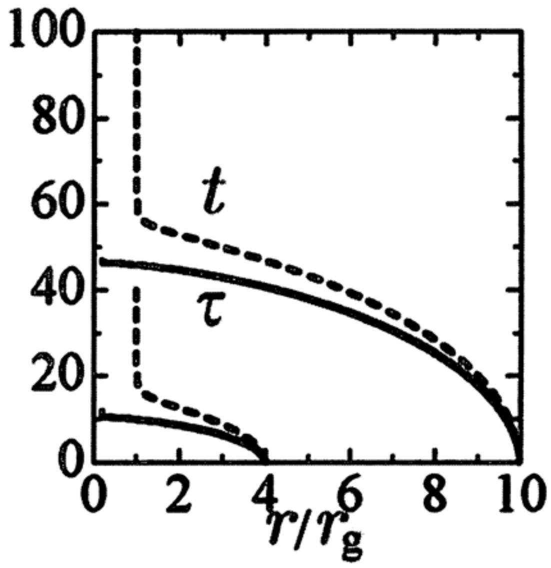

図6・4　自由落下している物体の位置と時間の関係。横軸はシュバルツシルト半径ｒｇで表した中心からの距離ｒ、縦軸は固有時間τ（実線）と無限遠の座標時間ｔ（破線）。

6－2　円運動

1）ニュートン力学での円運動

太陽のまわりを回る惑星の軌道は、円に近いが真円ではなく、正確には太陽を一つの焦

点とする楕円になっている。そのような一般的な楕円運動を考える前に、まず天体からの距離が一定な「円軌道」を動く「円運動」について調べてみよう。

天体のまわりを円運動している物体には、天体からの重力と外向きの遠心力が働いているが、重力と遠心力は常に釣り合っている。重力と遠心力が相殺してネットな（全体の）力は0になり、その結果、無重量の自由落下状態になっている（図6・5）。

2）相対論的な効果

アインシュタインの一般相対論では、ニュートンの万有引力の法則（逆2乗の法則）の場合に比べて、重力が強くなることは何度か触れた。したがって、ブラックホールのまわりを円運動しようとするならば、強くなった重力の分だけ、遠心力も増やさないといけないので、そのためには、より早くまわる必要があるだろうということは容易に予想がつく。

すなわち、ブラックホールのまわりの円運動では、ニュートン力学の場合よりも回転の速度などが大きめになる。実際、一般相対論を用いてブラックホールのまわりの円運動を調べてみると、回転角速度も回転速度も角運動量もすべて、ニュートン力学の場合より大きくなっていることがわかる（図6・6）。そして、シュバルツシルト半径に近づいて重力がより強くなるにつれ、ずれの度合いも大きくなっていることがわかる。ただ、これは、あくまでも定量的な差異であって、この範囲では、たとえば中心ほど回転速度が大きくなるというような、定性的な話はニュートン力学と変わらない。

しかし、より中心付近では、ニュートン力学では存在しなかった、真に相対論的な現象が現れる。その一端は、すでに回転速度などのグラフにも見て取れる。すなわち、中心に向かうほど、相対論的なケプラー円運動の回転速度も、ニュートン力学の場合と同様に増加するのだが、ニュートン力学では中心で無限大に発散するのに対し、相対論の場合はもっと手前で発散している。それも、シュバルツシルト半径で無限大になるならまだしも、それよりさらに手前なのだ。具体的には、シュバルツシルト半径の1.5倍で発散する。この様子は、角運動量のグラフでとくに顕著である（図6・6の一番下の図）。

このことは何を意味しているかというと、シュバルツシルト半径の1.5倍の半径に近づくにつれて、重力と釣り合うために必要な回転の勢いがどんどん大きくなり、1.5倍より内側では、どんなに回転の勢いを高めても、決して重力と釣り合うことができないことを表しているのだ。

何故そんなことが起こるのかと言えば、これも“エネルギーと物質が等価である”というアインシュタインの式に基づく話なのだ。

ニュートン力学の場合、軌道半径が小さくなるとそれだけ重力も強くなるが、より速く回転して遠心力を大きくすることにより、どこかで必ず重力に対抗できる。しかし、相対論では、あ

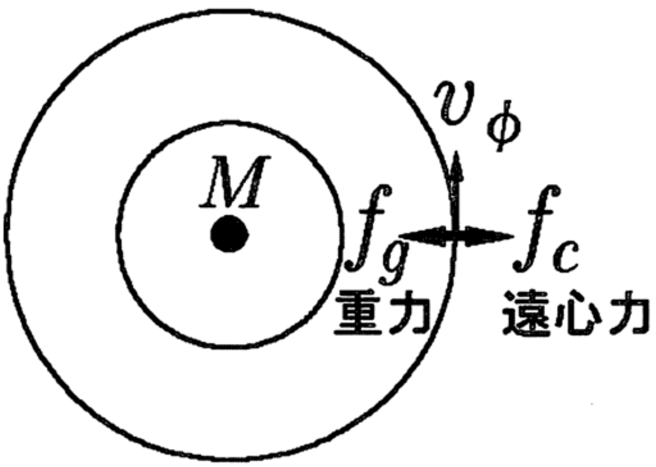

図6・5　天体のまわりの円運動。質量Mの天体のまわりの円運動では、天体から働く重力ｆｇと遠心力ｆｃが釣り合っている。

らゆるエネルギーは物質すなわち質量と同じモノである。そして、ブラックホールのまわりを円運動するということは、そこには回転運動のエネルギーが存在することであり、したがって、回転運動のエネルギーと等価な質量が存在することなのである。さらに、ブラックホールに近づいて粒子の回転速度が高速になるにつれ、回転運動のエネルギーもどんどん大きくなり、等価質量も大きくなる。その結果、遠心力を大きくするつもりが、かえって重力を強めることになってしまい、ついには、回転運動によって重力をバランスさせることができなくなってしまうのだ。その限界の半径が、シュバルツシルト半径の1.5倍という半径なのである。

なお、これとは別に、円軌道の力学的安定性という問題があって、仮に円軌道が可能でも、その軌道を長時間安定に維持できるかどうかはまた別の話になる。詳しい解析によると、シュバルツシルト半径の3倍より内側では円軌道が不安定になることがわかっている。すなわち、現実的には、シュバルツシルト半径の3倍より内側では円軌道は存在できないと考えてよい。

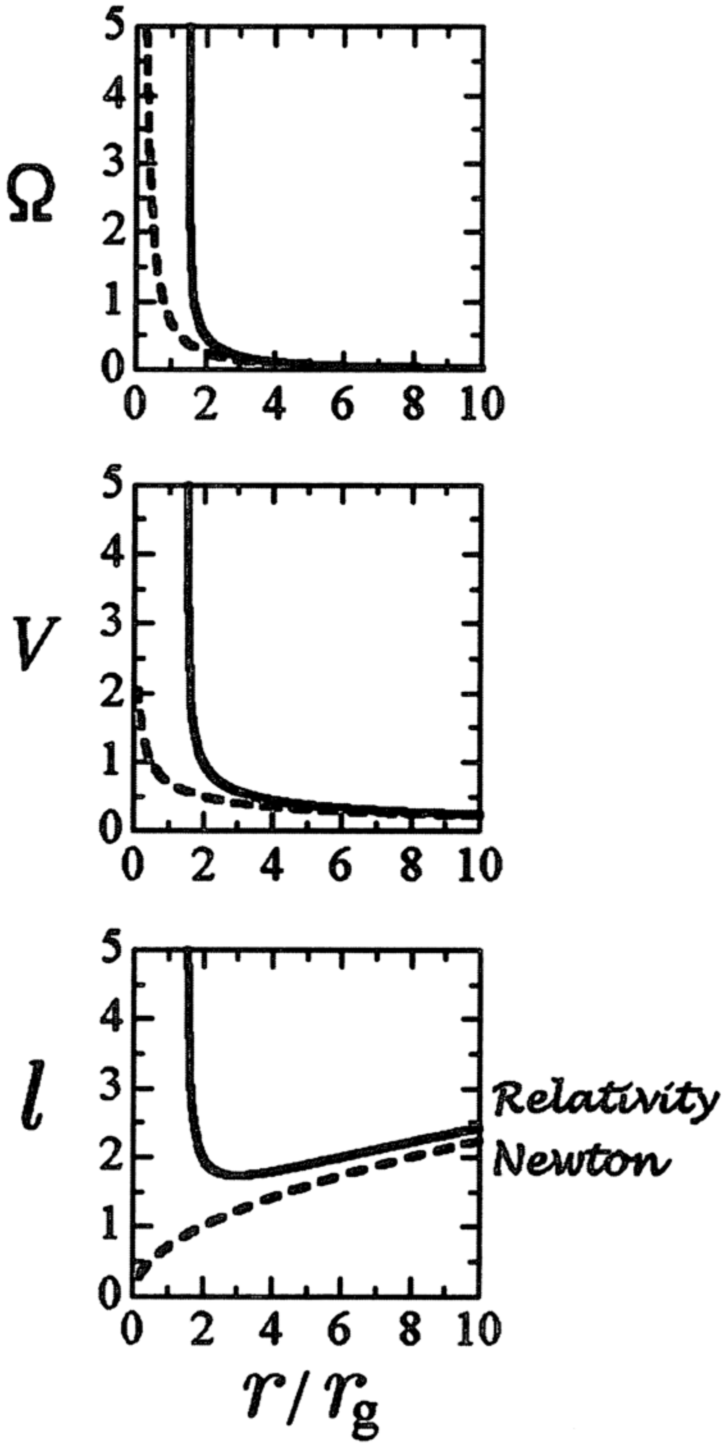

図6・6　一般相対論的なケプラー運動（円運動）での、回転角速度Ω、回転速度V、比角運動量ｌ（単位質量当たりの角運動量）。横軸はシュバルツシルト半径ｒｇで表した中心からの距離ｒ。実線が一般相対論の場合を、破線はニュートン力学の場合を表す。ニュートン力学では中心で発散が起こるが、一般相対論ではシュバルツシルト半径の1.5倍で発散していることに注意。

6－3　惑星運動

1）相対論的効果

ブラックホールのまわりの軌道運動の計算例を具体的に示しておこう（図6・7から図6・10）。初期条件の取り方は無数にあるので、軌道もさまざまな軌道が可能だが、ニュートン力学における軌道運動

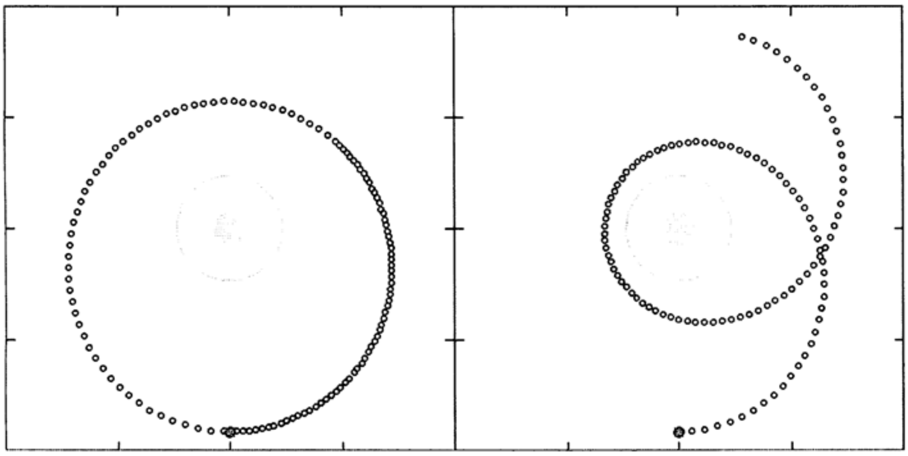

図6・7（上） ニュートン力学（左）と相対論（右）での粒子軌道の違い。中心の黒丸がブラックホールで、その少し外側の円は最終安定円軌道（シュバルツシルト半径の3倍）を表す。

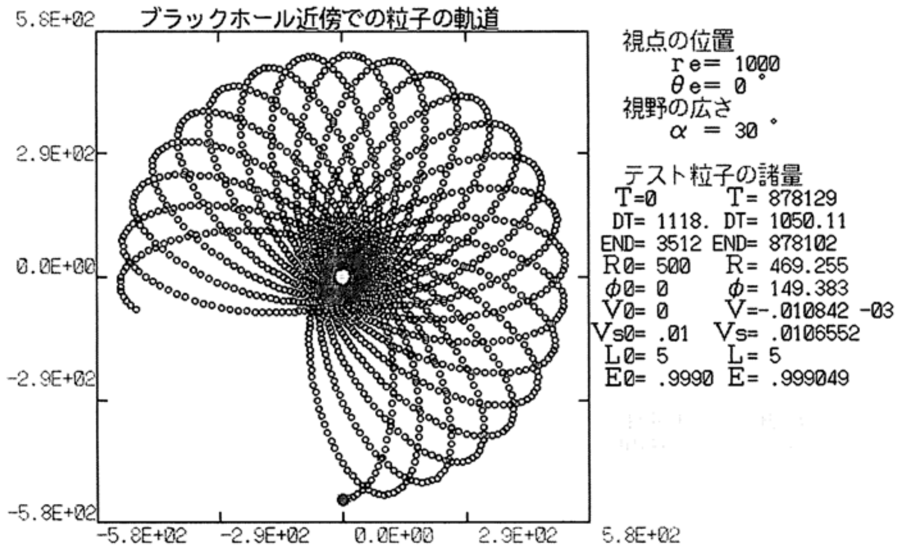

図6・8（左） 軌道の軸がずれていく。

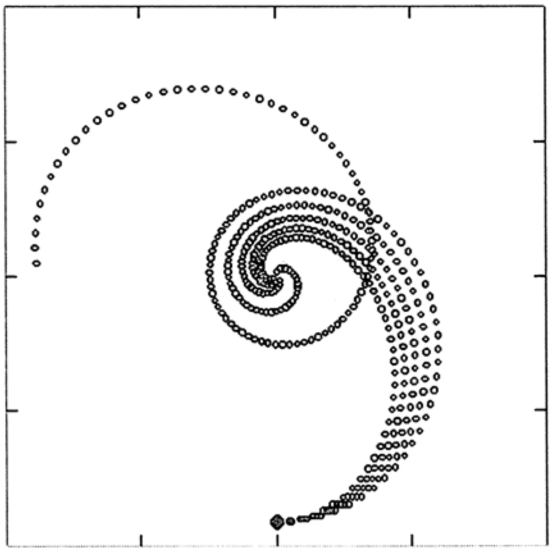

図6・9（上） ブラックホールに落下する軌道。

との顕著な違いはすぐわかる。すなわち、

(1) ニュートン力学では軌道は閉じた楕円だったが、ブラックホールのまわりでは軌道は閉じた楕円にならない（図6・7）。

(2) 楕円的な軌道は描くが、その軸の方向、あるいは、ブラックホールにもっとも近い“近ブラ点”は、次第にずれていく（図6・8）。

(3) ブラックホールにあまりに近づくと、周回運動ができずに、ブラックホールに落ち込む（図6・9）。

2) 水星の近日点移動の実証

距離の2乗に反比例する引力が働く逆2乗の力の場では、惑星運動は太陽を一つの焦点とするきれいな楕円軌道を描く。しかし相対論では、引力が逆2乗で表せないために、たとえば楕円軌道は閉じなくなる。この性質を、「近日点の移動」と呼んでいる。

近日点の移動は、中心の天体がブラックホールであるか否かにかかわらず、太陽などのまわりでも生じうる現象で、ニュートンが正しければ楕円軌道は閉じるしアイ

ンシュタインが正しければ楕円軌道は閉じない。実際、太陽に一番近い惑星である水星では、その楕円軌道（離心率 $\varepsilon = 0.21$）が完全に閉じておらず、少しずつ近日点の移動が起こっていることが知られていた（図6・11)。

観測される移動量は、100年につき角度にして5600秒角（1° 33′ 20″）ほどもあった。もちろん太陽系の中には、木星などの巨大惑星もあるので、それらの重力によっても水星の軌道は影響を受け、近日点の移動は生じる。しかし、水星の近日点の移動量のうちで、ニュートン力学だけではどうしても説明できない部分が、100年につき43秒角分だけ残っていた。そしてアインシュタイン自身が、自分の構築した一般相対論を使って、この説明不能だった分をあざやかに解決したのは、あまりにも有名な話である。今日では、水星の近日点移動の説明は、一般相対論の検証の古典的テストの一つとして知られている。

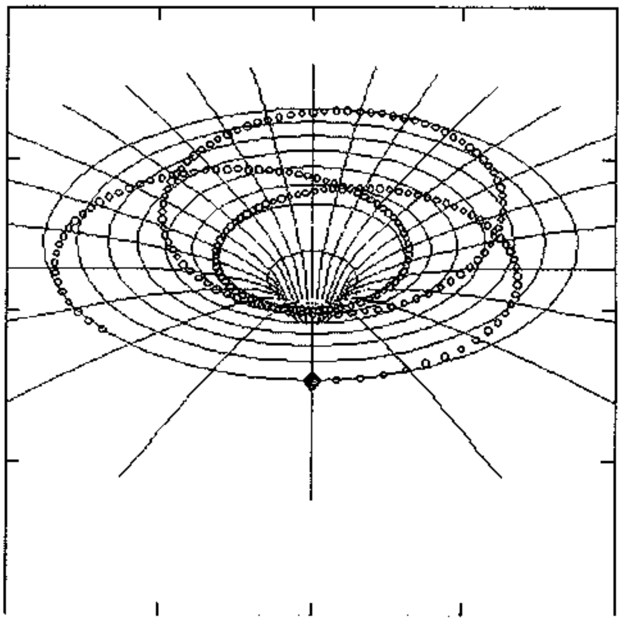

図6・10　埋め込みダイアグラムで表現したブラックホール周辺の粒子の軌道。

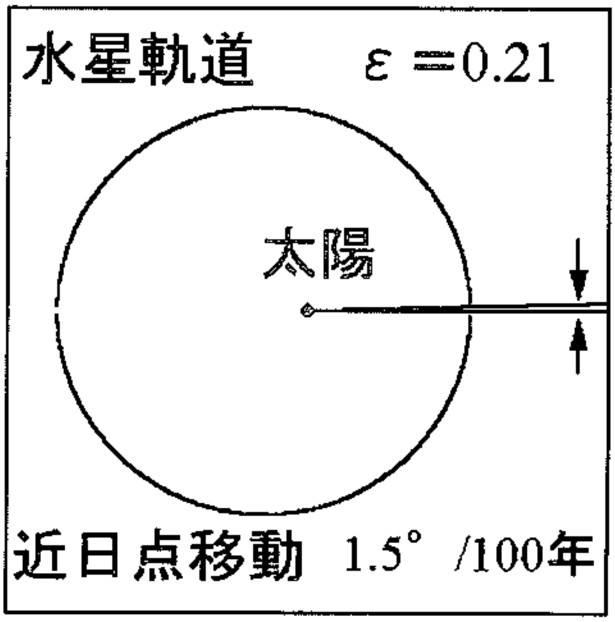

図6・11　水星の近日点移動。離心率 $\varepsilon = 0.21$。