解説

惑星会合
—計算法とその結果—

作花一志（京都コンピュータ学院）

はじめに

20世紀の最後の年である今年5月18日に水星・金星・火星・木星・土星が“すばる”の辺りに集合したが、あいにくとすべて太陽の背後なのでその姿は見られなかった。前回の5惑星会合は1962年2月で、次は2040年9月まで待たねばならない。惑星会合がいつどのように起こったのかを調べるために−3000年から3000年までにわたって、5惑星の黄経がある範囲に収まる日時を計算した。今月号では計算法と結果を述べて、次号ではその主なものについて歴史的考察を試みる。

惑星の位置計算

まず日付の表記から始めよう。1858年11月17日午前0時（日本標準時で午前9時）からの通日をMJD（修正ユリウス日）といい、グレゴリウス暦の日本標準時YY年MM月DD日HH時NN分は次式でMJDに変換される。

$$MJD = [365.25YY] + [YY / 400] - [YY / 100] + [30.59 (MM - 2)] + DD + (HH - 9) / 24 + NN / 1440 - 678912 \quad (1)$$

ただし［　］の記号は切捨て整数化を表し、1月と2月は前年の13月、14月とする。

太陽系の天体は一部の彗星を除き楕円軌道を描いており、どんな楕円上をどんな速度で運動するかはケプラーの3つの法則に従う。楕円の形は軌道長半径aと離心率eとで特徴づけられる。aの単位は天文単位（AU：Astronomical Unit）を用いる。楕円の中心を原点、長軸をx軸、短軸をy軸とする座標系をとると焦点は（±ae,0）であり、第1法則より太陽は一つの焦点S（ae, 0）に、惑星は楕円上P（X,Y）に位置している。原点を中心とし半径aの円を描き、P'を図1のように定め∠P'OX = Eを導入しこれを離心近点角という。

$$X = a\cos E \quad (2)$$

$$Y = a\sqrt{(1 - e^2)} \times \sin E \quad (3)$$

惑星が楕円上をどのように運動し、いつどこにいるかは第2法則より導かれるケプラーの方程式を解くことによって決定される。

$$E - e\sin E = M \quad (4)$$

この方程式はM（平均近点離角）を与えてEを求めるものであるが、MはMJDの1次式で与えられ、近日点通過時に0°、遠日点通過時に180°となる。

$$M = n\,(MJD - MJD_0) + M_0 \quad (5)$$

M_0はMJD = MJD_0（基準日）の時のMの値である。また定数nは平均日々運動といわれ、惑星が1日当たり公転運動する角度で平均角速度に当たる。

$$n = 360^\circ / (365.24219\,p)$$

pは公転周期であるが、第3法則によってp

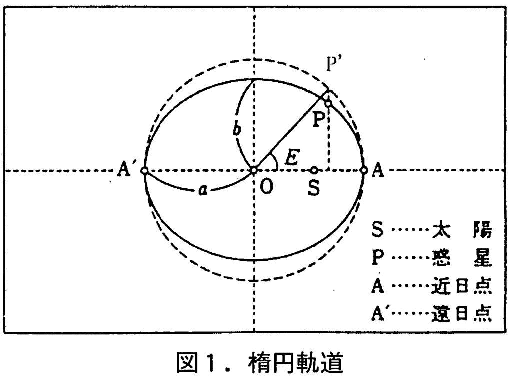

図1．楕円軌道

（年）と a（AU）は、

$$a^3 = p^2$$

という関係があるから

$$n = 0.985647365\ a^{-3/2} \qquad (6)$$

である。

ケプラーの方程式（4）は典型的な非線形方程式で、E を MJD の初等関数で表すことはできない。しかしこれは基本的な数値計算の演習問題で、ニュートン法で容易に解くことができる。

軌道長半径 a、離心率 e、基準日 MJD_0 とその平均近点離角 M_0 を与えると、任意の日付（YY, MM, DD, HH, NN）における M が（5）、（6）から計算でき、ケプラーの方程式（4）を数値的に解いて、求めた E を（2）、（3）に代入すれば X, Y が求まり、すなわち任意の時刻の惑星の位置が得られる。

惑星の位置・運動を三次元的に表すには日心黄道座標を使う。黄道面を基準にとり太陽を中心にして春分点方向を x 軸、黄道面上で x 軸と +90° をなす方向を y 軸、黄道面と垂直な方向を z 軸とする。惑星の軌道面と黄道面の関係は図2の通りで、黄道面と惑星の軌道面との交角を軌道傾斜 i、惑星の軌道が黄道面と交わる2点を昇交点および降交点という。太陽から見て春分点と昇交点との離角を昇交点黄経Ω、昇交点と近日点との離角を近日点引数 ω という。これらの3つの角も惑星毎に決まった定数である。Ωは黄道面上の角度で ω は軌道面上の角度だが、両者の和 $pi = \Omega + \omega$ を近日点黄経といい、春分点から近日点までの角度である。（2）、（3）の X, Y は次式によって日心黄道座標 x, y, z に変換され、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos i \\ 0 & \sin i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X-ae \\ Y \end{pmatrix} \qquad (7)$$

さらに黄経 λ、黄緯 β、地心距離 Δ に変換される。

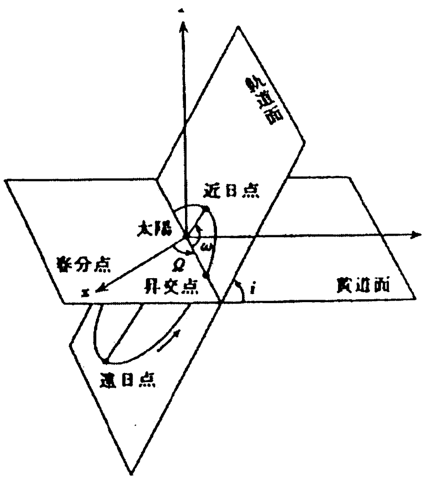

図2. 日心黄道座標

$$\begin{aligned} \lambda &= \tan^{-1}((y - y_0) / (x - x_0)) \\ \beta &= \tan^{-1}((z - z_0) / \sqrt{\ }((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)) \\ \Delta &= \sqrt{\ }((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2) \end{aligned} \qquad (8)$$

ただし x_0, y_0, z_0 は地球の日心黄道座標で $z_0 = 0$ である。

次に日心黄道座標 x, y, z を地心赤道座標 x′, y′, z′ に変換する。地心赤道座標とは地球を中心とし、春分点方向を x′ 軸、地球の赤道面を x′y′ 面、地球の自転軸を z′ 軸とする座標系である。両者の面は ε（～23.4°）だけ傾いているので、両座標系の変換式は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

で与えられ、x′, y′, z′ は直ちに赤経 α、赤緯 δ に変換される。

$$\begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1}(y' / x') \\ \delta &= \tan^{-1}(z' / \sqrt{\ }(x'^2 + y'^2)) \end{aligned} \qquad (10)$$

これより惑星や彗星の太陽系内の位置は、日付と6つの軌道要素 a, e, M_0, i, Ω, ω が与えられれば計算できる。

上記の計算には惑星は太陽からのみ万有引力を受けて運動しているという大前提がある。ところが実際は他の惑星（主に木星）か

らも力を受けており、地球の場合は月が重要な重力源ともなる。そのために軌道要素は定数ではなくなり、時間（MJD）とともに変わる。したがって軌道も正確には楕円でなくなり、一般には非常に複雑な運動となる。特に大きく変化するのがΩとωで「理科年表」[1]には毎年の値が載っている。この小文の計算では、軌道要素 a, e, *i*, Ω, *pi*（=Ω+ω）, ML（= *pi* + M）およびεは「天体位置表」[2]に載っているMJDの2次式を使った。

プログラムはWindows98上のVisual Basic 6.0で作成し、図3はその実行画面である。惑星の位置を日心黄道座標x, yでプロットしたもので、表示倍率は任意に変えることができる。1日ごとの位置を連続的に計算することによって公転運動が見られる。公転速度も任意に変更でき、逆向き公転も表示できる。座標原点に地球を移せば周転円を伴う「天動説」表示もできる。また9惑星の他に彗星や小惑星を1個選んで付け加えることができるが、彗星・小惑星の軌道要素は定数としてあるため、基準日より大きく離れた日付においては不正確である。図3では小惑星Kyotoを選んで2000年5月18日UT 0hにおける土星までの惑星配置を図示した。

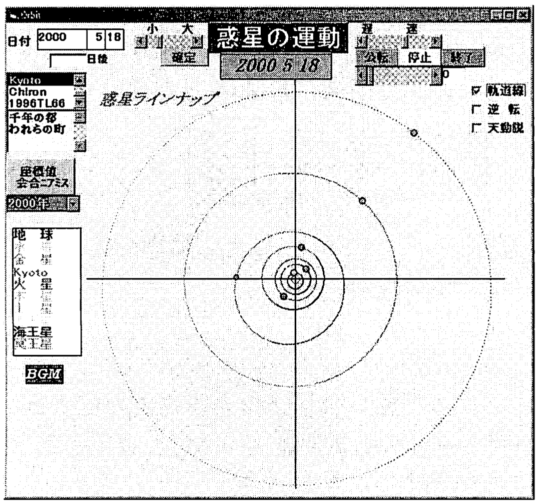

図3．2000年5月18日の惑星配置
内より太陽・水星・金星・地球・火星・Kyoto・木星・土星

惑星会合探索

惑星の軌道傾斜は冥王星を除いて $i < 10°$ だから常に黄緯は0°付近であり，惑星が会合するとはそれらの黄経の差がある角度以下に収まることと考える。−3000年から3000年までの間、5惑星の位置を毎日計算し、それらの黄経差の最大値の絶対値が20°以下に収まる日をピックアップしていったところ、表のように54回見つかった。そのうち22回は太陽と同じ方向なので見られない。5惑星会合が眺められるのは6000 / (54 - 22)～ 190年に1度ということになる。

参考文献

[1] 国立天文台編「理科年表」丸善
[2] 海上保安庁水路部「天体位置表」海上保安庁水路部
[3] 作花一志，1995「パソコンによるスカイウォッチング」サイエンス社

表．－3000年から3000年までの5惑星会合

M…日の出前　E…日没後　***…昼間で観望不可

日付はすべてグレゴリウス値である。

年	月	日	離角	星座	備考	年	月	日	離角	星座	備考
-2250	12	16	15	Cap-Aqr	***	332	10	6	9	Vir	M
-2209	4	15	15	Gem	E	670	3	22	17	Psc	M
-2189	2	7	16	Aqr	M	710	6	30	6	Cnc	E
-2149	6	22	19	Cnc	M	909	4	18	18	Ari	***
-1972	4	15	20	Gem-Cnc	E	1007	8	21	20	Leo	***
-1952	2	11	5	Aqr	M	1088	4	21	20	Tau	E
-1912	6	18	18	Cnc-Leo	***	1108	2	22	17	Cap	M
-1812	12	4	17	Sgr	M	1186	9	24	9	Vir	***
-1733	7	4	16	Leo-Vir	E	1284	12	23	16	Sgr	***
-1474	5	5	20	Tau-Gem	***	1524	2	29	11	Aqr	***
-1436	8	29	13	Vir	M	1564	7	10	19	Leo	E
-1295	6	6	18	Gem-Cnc	***	1584	5	2	17	Psc	M
-1197	10	24	10	Lib-Sco	M	1624	8	28	15	Leo	***
-1098	1	8	20	Aqr	***	1821	4	18	19	Psc	M
-1058	5	20	7	Cnc	E	1962	2	10	26	Cap	***
-1038	3	8	18	Psc	M	2000	5	18	19	Tau	***
-958	11	10	13	Sgr	***	2040	9	9	9	Vir	E
-660	1	4	17	Sgr-Cap	M	2100	11	13	16	Vir	M
-582	8	17	15	Vir	***	2297	7	14	13	Tau	M
-441	5	18	18	Gem-Cnc	E	2438	4	28	19	Psc	M
-244	1	20	20	Aqr	***	2478	8	7	15	Leo	E
-184	3	23	7	Psc	M	2675	3	28	17	Psc	***
-144	7	25	10	Leo	***	2715	7	25	17	Leo	E
-46	11	27	10	Oph	M	2775	9	24	19	Leo-Vir	***
133	11	29	15	Sgr	E	2814	1	17	20	Oph-Sgr	***
232	3	30	20	Ari	***	2816	1	23	19	Sgr-Cap	E
272	7	30	16	Leo-Vir	E	2954	11	3	11	Vir	***